Homotopia ja vektorikimput

Harj. 13. Ratkaisuja

1. Olk. $(U_i)_{i\in I}$ parakompaktin avaruuden X avoin peite. Parakompaktisuuden nojalla tällä peitteellä on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $(W_j)_{j\in J}$. Tihennys-ominaisuudesta seuraa, että on ol. funktio $\varphi: J \to I$ siten, että $W_j \subset U_{\varphi(j)}$ $\forall j \in J$.
Jokaisella $i \in I$ määritellään $V_i = \bigcup \{ W_j \mid \varphi(j) = i \}$.
$(V_i)_{i\in I}$ on haluamamme kokoelma:
- V_i avoin $\forall i$, koska W_j avoin $\forall j$.
- peite: (W_j) on peite ja jokainen W_j tulee mukaan johonkin joukoista V_i, itse asiassa täsmälleen yhteen, nimittäin joukkoon $V_{\varphi(j)}$.
- $V_i \subset U_i$, koska jos $\varphi(j) = i$, niin $W_j \subset U_i$, joten $V_i = \bigcup\{W_j \mid \varphi(j) = i\} \subset U_i$.
- lokaali äärellisyys:
  olk. $x_0 \in X$ ja U' x_0:n ympäristö s.e. $H = \{ j \in J \mid U' \cap W_j \neq \emptyset \}$ on äärellinen.
  Jos $U' \cap V_i \neq \emptyset$, niin $\varphi(j) = i$ jollakin $j \in H$, ja kääntäen. Siis
  $$\{ i \in I \mid U' \cap V_i \neq \emptyset \} = \varphi(H) \text{ on äärellinen.}$$
  $\square$

2. a) Ensinnäkin, $\max_{c\in C} \varphi(x,c)$ on olemassa jokaisella kiinteällä x, koska kompaktissa joukossa C määritelty jatkuva kuvaus $c \mapsto \varphi(x,c)$ saavuttaa suurimman arvonsa.
Olk. $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$.
(i) olk. $c_0 \in C$ s.e. $\varphi(x_0, c_0) = f(x_0)$. Koska φ on jatkuva, on pisteellä (x_0, c_0) ympäristö $X \times C$:ssä, jossa $\varphi(x,c) > f(x_0) - \varepsilon$. Erityisesti x_0:lla on ympäristö U, jossa $\varphi(x, c_0) > f(x_0) - \varepsilon$. Jos $x \in U$, on siis
$$f(x) = \max_{c\in C} \varphi(x,c) \geq \varphi(x, c_0) > f(x_0) - \varepsilon.$$

(ii) Nyt $\varphi(x_0, c) \leq f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$ $\forall c \in C$, joten joukko $\varphi^{-1}(\,]-\infty, f(x_0)+\varepsilon[\,)$ on joukon $\{x_0\} \times C$ ympäristö $X \times C$:ssä.
Lauseesta 15.24 [Väisälä] seuraa, että x_0:lla on ympäristö V s.e.
$$V \times C \subset \varphi^{-1}(\,]-\infty, f(x_0)+\varepsilon[\,),$$
eli $\varphi(x,c) < f(x_0) + \varepsilon$ $\forall x \in V, c \in C$.
Siis kun $x \in V$, on $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Siis $\forall x \in U \cap V$ pätee $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, mikä osoittaa jatkuvuuden. $\square$

b) Esim. $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = \min\{|xy|, 1\}$. Jos $x = 0$, on $\varphi(x,y) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$, joten $f(0) = 0$. Jos $x \neq 0$, niin $\exists y \in \mathbb{R}$ s.e. $|xy| = 1$, joten $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Siis f on epäjatkuva.

3.
$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f,g"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E(\eta) \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "\bar f, \bar g"] & C \end{tikzcd}$$

Olk. $h : E(\xi) \times I \to E(\eta)$ kimppuhomotopia $f \simeq g$.

Olkoon $s : B \to E(\xi)$ nollasektio (Harj. 8/Teht. 1). Siis $\bar f = \pi_2 \circ f \circ s$ ja $\bar g = \pi_2 \circ g \circ s$.
Homotopia $H: \bar f \simeq \bar g$ voidaan määritellä kaavalla

$$B \times I \xrightarrow{s \times id} E(\xi) \times I \xrightarrow{h} E(\eta) \xrightarrow{\pi_2} C :$$

$$(b,0) \mapsto (s(b),0) \longmapsto h(s(b),0) = f(s(b)) \mapsto \pi_2(f(s(b))) = \bar f(b),$$
$$(b,1) \mapsto (s(b),1) \longmapsto h(s(b),1) = g(s(b)) \mapsto \pi_2(g(s(b))) = \bar g(b).$$

$\square$

4. Pal. mieleen [Väisälä, Lause 17.3]: X lok. komp. Hausdorffin avaruus, $a \in U \overset{\circ}{\subset} X$. Tällöin a:lla on ympäristö V s.e. $\bar V$ on kompakti ja $\bar V \subset U$. $\}(*)$

Merkitään tarkasteltavia avaruuksia $(A \times B)_{tulo}$ ja $(A \times B)_{raja}$.

(i) olk. $(a,b) \in W \overset{\circ}{\subset} (A \times B)_{tulo}$.
Siis $\exists\ U \overset{\circ}{\subset} A$, $V \overset{\circ}{\subset} B$ s.e. $(a,b) \in U \times V \subset W$.
Koska $U \overset{\circ}{\subset} A$, on siis $U_n := U \cap A_n \overset{\circ}{\subset} A_n\ \forall n$, vastaavasti $V_n := V \cap B_n \overset{\circ}{\subset} B_n\ \forall n$.
Selvästi $(U \times V) \cap (A_n \times B_n) = U_n \times V_n$:

$$(x,y) \in (U \times V) \cap (A_n \times B_n) \Leftrightarrow x \in U \text{ ja } x \in A_n \text{ ja } y \in V \text{ ja } y \in B_n \Leftrightarrow x \in U_n \text{ ja } y \in V_n.$$

Siis $(U \times V) \cap (A_n \times B_n) = U_n \times V_n \overset{\circ}{\subset} A_n \times B_n\ \forall n$, joten rajatopologian määr. nojalla $U \times V \overset{\circ}{\subset} (A \times B)_{raja}$.

(ii) olk. $(a,b) \in W \overset{\circ}{\subset} (A \times B)_{raja}$.
Val. $n \in \mathbb{N}$ s.e. $(a,b) \in A_n \times B_n$. Koska $W \cap (A_n \times B_n) \overset{\circ}{\subset} A_n \times B_n$, niin $\exists$ avoimet $U_n \subset A_n$ ja $V_n \subset B_n$ s.e. $(a,b) \in U_n \times V_n \subset W \cap (A_n \times B_n)$.
Koska A_n ja B_n ovat lok. komp., niin $(*) \Rightarrow \exists$ ympäristöt K_n, L_n s.e. $(a,b) \in \bar K_n \times \bar L_n \subset U_n \times V_n \subset W$, $\bar K_n, \bar L_n$ kompakteja.

Konstruoidaan induktiolla joukot $K_\ell \subset A_\ell$, $L_\ell \subset B_\ell$ $\forall \ell \geq n$ s.e.
(i) $K_{\ell+1}$ on $\bar K_\ell$:n ympäristö $A_{\ell+1}$:ssä, $L_{\ell+1}$ on $\bar L_\ell$:n ymp. $B_{\ell+1}$:ssä
(ii) $\bar K_\ell \times \bar L_\ell \subset W$
(iii) $\bar K_\ell$ ja $\bar L_\ell$ ovat kompakteja.

Tällöin $U = \bigcup_{l \geq n} K_l$ on a:n ympäristö A:ssa, $V = \bigcup_{l \geq n} L_l$ on b:n ymp. B:ssä ja

$$(a,b) \in U \times V \subset W. \text{ Siis } W \circledcirc (A \times B)_{tulo}.$$

Induktioaskel: $\bar{K}_l \times \bar{L}_l$ on kompakti, $\bar{K}_l \times \bar{L}_l \subset W \cap (A_{l+1} \times B_{l+1}) \circledcirc A_{l+1} \times B_{l+1}$.
Ol. $c \in \bar{K}_l$. Jos $d \in \bar{L}_l$, niin $\exists$ ympäristöt $c \in C^d \circledcirc A_{l+1}$ ja $d \in D^d \circledcirc B_{l+1}$ s.e. $\bar{C}^d \times \bar{D}^d \subset W$, $\bar{C}^d$ ja $\bar{D}^d$ ovat kompakteja. Tässä käytettiin taas tietoa (*). Olkoon $D^{d_1}, \dots, D^{d_k}$ peitteen $(D^d)_{d \in \bar{L}_l}$ äärellinen osapeite ja merkitään

$$C = \bigcap_{i=1}^{k} C^{d_i} \quad \text{ja} \quad D = \bigcup_{i=1}^{k} D^{d_i}.$$

Tällöin C on c:n ympäristö A_{l+1}:ssä, D on $\bar{L}_l$:n ympäristö B_{l+1}:ssä, $\{c\} \times \bar{L}_l \subset \bar{C} \times \bar{D} \subset W$; $\bar{C}$ ja $\bar{D}$ ovat kompakteja.
$\uparrow$ $(x,y) \in \bar{C} \times \bar{D} \Rightarrow y \in \bar{D}^{d_{i_0}}$ joll. i_0 $\Rightarrow (x,y) \in \bar{C}^{d_{i_0}} \times \bar{D}^{d_{i_0}} \subset W$.

Antamalla sitten c:n vaihdella yli $\bar{K}_l$:n saadaan samalla tavalla halutut K_{l+1} ja L_{l+1}:
Kiinteällä $c \in \bar{K}_l$ on siis olemassa c:n ymp. C^c ja $\bar{L}_l$:n ymp. D^c kuten yllä. Olk. $C^{c_1}, \dots, C^{c_{k'}}$ peitteen $(C^c)_{c \in \bar{K}_l}$ äärellinen osapeite.
Merk.

$$K_{l+1} = \bigcup_{i=1}^{k'} C^{c_i}, \quad L_{l+1} = \bigcap_{i=1}^{k'} D^{c_i},$$

jolloin K_{l+1}, L_{l+1} toteuttavat ehdot (i)–(iii). $\square$

5. a) $\mathrm{Vect}_n(id) : \mathrm{Vect}_n(B) \to \mathrm{Vect}_n(B)$

$$\{\xi\} \longmapsto \{id^* \xi\}$$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

On siis osoitettava: $id^* \xi \cong \xi$.
Nyt $E_1 = \{(b,e) \mid b = \pi(e)\} \subset B \times E$.
Määr. $\varphi : E_1 \to E$, $\varphi(b,e) = e \in E$
$\psi : E \to E_1$, $\psi(e) = (\pi(e), e) \in E_1$.
φ ja ψ ovat selvästi jatkuvia ja toistensa käänteiskuvauksia; kiinteällä b saadaan oleellisesti id. kuvaus säikeiden välille.

b) Olk. $B_2 \xrightarrow{g} B_1 \xrightarrow{f} B$

$$\begin{array}{ccccc} E_2 & & E_1 & & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ B_2 & \xrightarrow{g} & B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_2' & & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_2 & \xrightarrow{f \circ g} & B \end{array}$$

$E_1 = \{(b,e) \mid f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E,$

$E_2 = \{(b',(b,e)) \mid g(b') = \pi_1(b,e) = b \text{ ja } f(b) = \pi(e)\} \subset B_2 \times (B_1 \times E).$

$E_2' = \{(b',e) \mid (f\circ g)(b') = \pi(e)\} \subset B_2 \times E.$

Määr. $\varphi : E_2 \to E_2'$, $\varphi(b',(b,e)) = (b',e) \in E_2'$, koska

$$(f\circ g)(b') = f(g(b')) = f(b) = \pi(e).$$

Määr. $\psi : E_2' \to E_2$, $\psi(b',e) = (b',(g(b'),e)) \in E_2$, koska

$$g(b') = \pi_1(g(b'),e) = g(b') \text{ ja}$$
$$f(g(b')) = (f\circ g)(b') = \pi(e).$$

φ ja ψ ovat selvästi jatkuvia ja toistensa käänteiskuvauksia; kiinteällä b' saadaan oleellisesti id. kuvaus säikeiden välille.

Siis $(f\circ g)^* \xi \cong g^*(f^*\xi)$.

Väite seuraa tästä, koska

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}_n(f\circ g) : \mathrm{Vect}_n(B) &\longrightarrow \mathrm{Vect}_n(B_2) \\ \{\xi\} &\longmapsto \{(f\circ g)^*\xi\} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}_n(g)\circ \mathrm{Vect}_n(f) : \mathrm{Vect}_n(B) &\longrightarrow \mathrm{Vect}_n(B_1) \longrightarrow \mathrm{Vect}_n(B_2) \\ \{\xi\} &\longmapsto \{f^*\xi\} \longmapsto \{g^*(f^*\xi)\}. \end{aligned}$$

$\square$

6

$$\begin{aligned} [[id], G_n] : [B, G_n] &\longrightarrow [B, G_n] \\ [g] &\longmapsto [g\circ id] = [g] \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[f][h], G_n] = [[f\circ h], G_n] : [B, G_n] &\to [B_2, G_n] \\ [g] &\longmapsto [g\circ(f\circ h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[h], G_n]\circ[[f], G_n] : [B, G_n] &\to [B_1, G_n] \to [B_2, G_n] \\ [g] &\longmapsto [g\circ f] \longmapsto [(g\circ f)\circ h] \end{aligned}$$

samat

ok.

$\square$