Homotopia ja vektorikimput
Harj. 12 (4.12.2014)

1. Väisälä, s. 104, teht. 12:20 (vrt. Harj. 1 / Teht. 1b) ja 2a))

2. a) Todista Lause 5.25.
b) Ol., että $\xi \downarrow B$ on vektorikimppu ja $(U_i)_{i\in I}$ on perhe B:n avoimia osajoukkoja, jotka ovat erillisiä (eli $U_i \cap U_j = \emptyset$, jos $i \neq j$) ja $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i \in I$. Merk. $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Osoita, että $\xi|U$ on triviaali. (Tätä käytettiin Lemman 5.32 todistuksessa).

3. Todista Lause 5.27.

4. Verrataan Lauseiden 5.22 ja 5.24 todistuksia. Lauseessa 5.22 muodostettiin numeroituva osapeite Lindelöf-ominaisuuden nojalla, Lauseessa 5.24 taas indeksijoukko hyvinjärjestettiin. Menisikö Lauseen 5.22 todistuksessa jotakin pieleen, jos peitteen $(U_x)_{x\in X}$ indeksijoukko hyvinjärjestettäisiin ja edettäisiin sitten transfiniittisellä induktiolla?

5. Osoita: Jos X on parakompakti ja $A \Subset X$, niin A on parakompakti.

6. Olkoon (a) väite kuten Harj. 10 / Teht. 6
Merk. $\alpha : S^{n-1} \to S^{n-1}$ antipodi-kuvaus $\alpha(x) = -x$.
Osoita, että (a) $\Rightarrow$ $\alpha \simeq id_{S^{n-1}}$.

(Lisätietoja (ei tarvita tehtävän ratkaisussa): Esim. homotopiateorian avulla voidaan osoittaa, että $\alpha \simeq id_{S^{n-1}}$ ei päde, jos n on pariton, eli jos pallon dimensio on parillinen. Siis:
Jos n on parillinen, niin pallolla S^n ei ole olemassa ei-missään-häviävää vektorikenttää.
Harj. 8/Teht. 6 osoitettiin, että tällainen vektorikenttä on olemassa, jos n on pariton.)