Homotopia ja vektorikimput

Harj. 12, ratkaisuja.

1. a) Olk. $a \in X$ mielivaltainen.

Valitaan a:n ympäristö U s.e. $I = \{ j \in J \mid U \cap A_j \neq \emptyset \}$ on äärellinen.

Nyt

$$U \cap A = U \cap \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} U \cap A_j = \bigcup_{j \in I} U \cap A_j = U \cap \bigcup_{j \in I} A_i \Subset U,$$

koska $\bigcup_{i \in I} A_i \Subset X$ äärellisenä yhdisteenä suljetuista joukoista.

Siis $U \cap A^c \circledcirc U \circledcirc X$. Jokaisella pisteellä on siis ympäristö, jossa A^c on avoin, joten $A^c \circledcirc X$ ja siis $A \Subset X$.

$\square$

b) Olk. $B \Subset Y$.

Nyt $f^{-1}B = \bigcup_{j \in J} (f^{-1}B \cap A_j) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{(f|A_j)^{-1} B}_{\Subset A_j \Subset A}$, koska $f|A_j$ jatkuva

Perhe $((f|A_j)^{-1}B)$ on lok. äärellinen, koska $(f|A_j)^{-1} B \subset A_j \ \forall j$ ja perhe (A_j) on lok. äärellinen.

Siis $f^{-1}B$ on yhdiste lok. äärellisestä perheestä suljettuja joukkoja, joten $f^{-1}B \Subset A$ a)-kohdan nojalla.

Siis f on jatkuva.

$\square$

2. a) Alku sama kuin Harj. 11/Teht. 5.

Saadaan funktiot $f_i : X \to [0,1]$ ja määr.

$$\lambda_i : X \to [0,1]$$
$$\lambda_i(x) = f_i(x) \Big/ \sum_{i \in I} f_k(x).$$

Nimittäjän summa on oleellisesti äärellinen (kiinteällä x), koska jokainen x kuuluu vain äärellisen moneen joukoista U_i ja $f_i \equiv 0$ U_i:n ulkopuolella.

Lisäksi $\forall x \exists i$ s.e. $f_i(x) > 0$, joten nimittäjä $\neq 0 \ \forall x$.

Jatkuvuus: olk. $x_0 \in X$; valitaan x_0:n ympäristö U', joka leikkaa vain äärellisen montaa joukoista U_i. Tässä ympäristössä nimittäjän summa on oleellisesti äärellinen, jolloin λ_i on jatkuva U':ssa.

Jokaisella x_0 on siis ymp., jossa λ_i on jatkuva, joten λ_i on jatkuva X:ssä.

Koska $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset U_i \ \forall i$ ja perhe (U_i) on lok. äärellinen, on myös perhe $(\mathrm{supp}(\lambda_i))$ lok. äärellinen.

$\square$

b) Jos $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)$ ovat isomorfismeja (Määr. 3.2), niin isomorfismi $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ saadaan suoraan näistä määrittelemällä $h(u,x) = h_i(u,x)$, kun $u \in U_i$. Koska joukot $U_i \times \mathbb{R}^n$ ovat erillisiä, on h hyvin määritelty. Jatkuvuus seuraa joukkojen U_i avoimuudesta ($U_i \times \mathbb{R}^n \subset U \times \mathbb{R}^n$), kts. Harj. 1/Teht. 1 a).
Koska $\pi^{-1}(U) = \bigcup \pi^{-1}(U_i)$ ja yhdiste on erillinen, saadaan käänteisfunktio $\underbrace{}_{h^{-1}}$ määriteltyä vastaavasti.

$\square$

3. Valitaan peitteelle $(U_i)_{i\in I}$ lok. äärellinen tihennys $(V_j)_{j\in J}$ ja funktio $f : J \to I$ s.e. $V_j \subset U_{f(j)}$ $\forall j \in J$. Koska B on normaali (Lause 5.26), on Lauseen 5.25 nojalla olemassa peitteelle $(V_j)_{j\in J}$ alistettu ykkösen ositus $(\mu_j)_{j\in J}$. Määritellään

$$\lambda_i(x) = \sum_{f(j)=i} \mu_j(x).$$

Koska perhe $(\mathrm{supp}(\mu_j))_{j\in J}$ on lok. äärellinen, on jokaisella pisteellä x ympäristö, jossa summa on oleellisesti äärellinen. Siis λ_i on hyvin määr. ja jatkuva $\forall i \in I$. Merkitään

$$W_i = \bigcup_{f(j)=i} \mathrm{supp}(\mu_j).$$

Tehtävän 1 a) nojalla W_i on suljettu. Selvästi $\{x \in B \mid \lambda_i(x) \neq 0\} \subset W_i$, joten $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset \overline{W_i} = W_i \subset U_i$.

↑ koska jos $f(j)=i$, niin $\mathrm{supp}(\mu_j) \subset V_j \subset U_i$

Lisäksi $\sum_{i\in I} \lambda_i = \sum_{j\in J} \mu_j = 1$.

Os. vielä, että $(W_i)_{i\in I}$ on lok. äärellinen:
jos $b \in B$, niin on olemassa avoin $V \ni b$ s.e. $H = \{j \in J \mid V \cap V_j \neq \emptyset\}$ on äärellinen. Koska $W_i = \bigcup_{f(j)=i} \mathrm{supp}(\mu_j) \subset \bigcup_{f(j)=i} V_j$,

on $V \cap W_i \neq \emptyset$ vain, kun $i \in f(H)$, joka on äärellinen.

$\square$

4. Jos määriteltäisiin $W_x = V_x \setminus \bigcup_{y<x} \overline{U_y}$, niin yhdiste ei tässä tilanteessa välttämättä olisi äärellinen, joten ei tiedetä, onko yhdiste suljettu.

Merk. $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$.

5\. Olk. $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ avaruuden A avoin peite. Jokaisella $i \in I$ valitaan $V_i \subset \mathbb{X}$ s.e. $V_i \cap A = U_i$. Nyt $\mathcal{V} \cup \{\mathbb{X} \setminus A\}$ on $\mathbb{X}$:n avoin peite, joten sillä on lok. äärellinen avoin tihennys $\mathcal{W}' = (W_j')_{j \in J}$, $\mathbb{X}$:n parakompaktisuuden nojalla.

Määr. $\mathcal{W} = \{ W_j' \cap A \mid j \in J \}$, joka selvästi on A:n avoin peite.

Lokaali äärellisyys on myös selvä, koska $W_j' \cap A \subset W_j'$ ja $(W_j')_{j \in J}$ on lok. äärell.

Os. vielä, että $\mathcal{W}$ on $\mathcal{U}$:n tihennys:

jos $j \in J$, niin $W_j' \subset V_i$ jollakin $i \in I$ tai $W_j' \subset \mathbb{X} \setminus A$. Jos $W_j' \subset \mathbb{X} \setminus A$, niin $W_j' \cap A = \emptyset$; jos taas $W_j' \subset V_i$, niin $W_j' \cap A \subset V_i \cap A = U_i$.

Siis joka tapauksessa $W_j \subset U_i$ jollakin i.

Lopuksi: $\mathbb{X}$ Hausdorff $\Rightarrow$ A Hausdorff.

$\square$

6\. Määritellään $H : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ kaavalla

$$H(x,t) = (1-2t)x + \sqrt{1-(1-2t)^2}\, \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

- kun $t \in [0,1]$, on $1-(1-2t)^2 \in [0,1]$, joten $\sqrt{}$ on määritelty; koska $f(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, on nimittäjä $\|f(x)\| \neq 0 \ \forall x$.
- H on selvästi jatkuva.
- $H(x,t) \in S^{n-1}$:

$$\left\| (1-2t)x + \sqrt{1-(1-2t)^2}\,\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\|^2 \overset{x \perp f(x)}{=} \|(1-2t)x\|^2 + \left\| \sqrt{1-(1-2t)^2}\,\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\|^2$$

$$= (1-2t)^2 \underbrace{\|x\|^2}_{=1} + (1-(1-2t)^2) \underbrace{\left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\|^2}_{=1} = (1-2t)^2 + 1 - (1-2t)^2 = 1.$$

- $H(x,0) = 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = x$
- $H(x,1) = -1 \cdot x + 0 \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = -x$.

$\square$

Toinen ratkaisu (Toni Annala):

Harj. 10 / Teht. 6 (b)-ehdon mukaan on olemassa jatkuva $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ s.e. $g(x) \neq x$ ja $g(x) \neq -x \ \forall x \in S^{n-1}$.

Harj. 4 / Teht. 4 nojalla saadaan nyt $g \simeq \alpha$ ja $g \simeq \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Siis $\alpha \simeq \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

$\square$