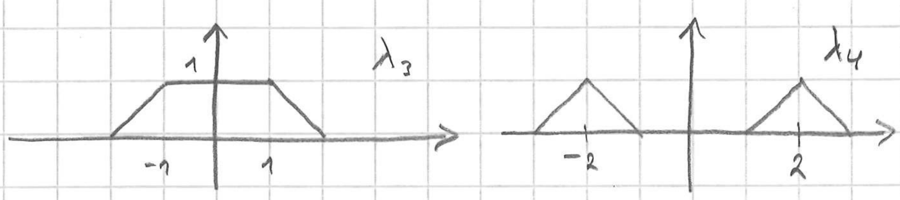
Homotopia ja vektorikimput

Harj. 11, ratkaisuja

1. $\lambda_1 \equiv 0$, $\lambda_2 \equiv 0$



. . .

2. Oletetaan, että ykkösen ositus (ψ_i) on konstruoitu ja $\psi_i^{-1}(0,1] = U_i \ \forall i$.
Valitaan jatkuva funktio $\theta : [0,1] \to [0,1]$ s.e. $\theta(t) = 0$, kun $t \leq \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}$ ja $\theta(t) > 0$ muuten.
Määritellään $\lambda_i' = \theta \circ \psi_i : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to [0,1] \to [0,1]$.

<u>väite 1.</u> $\mathrm{supp}(\lambda_i') \subset U_i$.

<u>tod.</u> $x \notin U_i \Rightarrow \psi_i(x) = 0 \Rightarrow$ x:llä $\exists$ ympäristö, jossa $\psi_i < \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}$
$\Rightarrow$ tässä ympäristössä $\lambda_i' = \theta \circ \psi_i = 0 \Rightarrow x \notin \mathrm{supp}(\lambda_i')$. $\square$

<u>väite 2.</u> $\sum \lambda_i' > 0$ eli: $\forall x \ \exists i_0$ s.e. $\lambda_{i_0}'(x) > 0$.

<u>tod.</u> olk. $x \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mielivaltainen.
Koska summassa $\sum_i \psi_i(x)$ yhteenlaskettavia on $\binom{n+k}{n}$ kpl ja $\sum_i \psi_i(x) = 1$, niin kaikki yhteenlaskettavat eivät voi olla $\leq \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}$.
Siis $\exists i_0$ s.e. $\psi_{i_0}(x) > \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}$, jolloin

$$\lambda_{i_0}'(x) = \theta\Big(\underbrace{\psi_{i_0}(x)}_{> \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}}\Big) > 0.$$

$\square$

Määritellään lopuksi $\lambda_i(x) = \dfrac{\lambda_i'(x)}{\sum_k \lambda_k'(x)}$, $\lambda_i : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to [0,1]$, $1 \leq i \leq \binom{n+k}{n}$.

Koska $\forall x \ \exists k$ s.e. $\lambda_k'(x) > 0$ ja $\lambda_k'(x) \geq 0 \ \forall k$, on nimittäjä aina $\neq 0$, joten λ_i on hyvin määr. jatkuva funktio.
Selvästi $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$.

Lisäksi $\lambda_i'(x) = 0 \Rightarrow \lambda_i(x) = 0$, joten

$\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset \mathrm{supp}(\lambda_i') \subset U_i$.

Osoitetaan, että perhe $(\mathrm{supp}(\lambda_i))_i$ on lok. äärellinen: selvä, koska peite on äärellinen.

~~olk. $x \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Perhe $(\mathrm{supp}(\psi_i))$ on lok. äärell. $\Rightarrow$ x:llä on~~

~~ymp. V_x s.e. $\{i \in I \mid \mathrm{supp}(\psi_i) \cap V_x \neq \emptyset\}$ on äärellinen.~~

~~Nyt $\{i \in I \mid \mathrm{supp}(\lambda_i) \cap V_x \neq \emptyset\} \subset \uparrow$ (*):n nojalla,~~

~~joten sekin on äärellinen.~~

Lopuksi

$$\forall x \in X: \quad \sum_i \lambda_i(x) = \sum_i \frac{\lambda_i'(x)}{\sum_k \lambda_k'(x)} = \frac{1}{\sum_k \lambda_k'(x)} \cdot \sum_i \lambda_i'(x) = 1. \qquad \square$$

3. Määritelmässä (5,5) tulkitaan $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$ triviaaliksi kimpuksi $\varepsilon^{n+k}_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})}$, jolloin γ^n on tämän alikimppu.
Esimerkin 3,13 nojalla kimpulla $\varepsilon^{n+k}_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})}$ on Riemannin metriikka.
Käytetään nyt Määritelmää 4.9 ja Lausetta 4.10 (η on tässä $\varepsilon^{n+k}_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})}$ ja ξ on γ^n). Niiden nojalla

$$\varepsilon^{n+k}_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})} \cong \gamma^n \oplus (\gamma^n)^\perp.$$

$(\gamma^n)^\perp$ on $\mathbb{R}^k$-kimppu, koska $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{"säikeen dimensio kimpussa } (\gamma^n)^\perp\text{"}}}{\dim (\gamma^n)^\perp} = \dim(\varepsilon^{n+k}) - \dim(\gamma^n) = (n+k) - n = k$. $\square$

4.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\gamma^n) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & E(\delta) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{array}$$

$\bar{f}^*\gamma^n$ kokonaisavaruus $= \{(b_1, e_1) \mid \bar{f}(b_1) = \pi(e_1)\} \subset B \times E(\gamma^n)$

$\bar{f}^*\delta$ — " — $= \{(b_2, e_2) \mid \bar{f}(b_2) = \pi'(e_2)\} \subset B \times E(\delta)$

$\bar{f}^*\gamma^n \oplus \bar{f}^*\delta$ kok.av. $E_1 = \{((b_1, e_1), (b_2, e_2)) \mid \bar{f}(b_1) = \pi(e_1),\ \bar{f}(b_2) = \pi'(e_2),\ b_1 = b_2\}$
$\subset (B \times E(\gamma^n)) \times (B \times E(\delta))$

$\gamma^n \oplus \delta$ kok.av. $= \{(e_1, e_2) \mid \pi(e_1) = \pi'(e_2)\} \subset E(\gamma^n) \times E(\delta)$

$\bar{f}^*(\gamma^n \oplus \delta)$ kok.av. $E_2 = \{(b, (e_1, e_2)) \mid \bar{f}(b) = \pi(e_1) = \pi'(e_2)\} \subset B \times E(\gamma^n) \times E(\delta)$.

Kuvaus $\varphi: E_2 \to E_1$, $(b, (e_1, e_2)) \longmapsto ((b, e_1), (b, e_2))$

on kimppuisomorfismi:

- hyvin määr. bijektio, koska E_1 ja E_2 määr. ehdot oleellisesti samat
- jatkuvuus ok, molempiin suuntiin
- säikeillä isomorfismi (b pysyy samana, $(e_1, e_2) \mapsto (e_1, e_2)$).

$\square$

5. Olk. $\mathcal{U} = (U_i)_{i=1}^n$ normaalin avaruuden X avoin peite.
Käytetään vihjettä kahdesti, jolloin saadaan avoimet peitteet $(V_i)_{i=1}^n$ ja $(W_i)_{i=1}^n$ s.e.

$$W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on Urysonin lemman nojalla olemassa jatkuva funktio $f_i : X \to [0,1]$ s.e. $f_i(x) = 1$, kun $x \in \overline{W_i}$ ja $f_i(x) = 0$, kun $x \in X \setminus V_i$.
Koska (W_i) on peite, niin $\forall x \; \exists i$ s.e. $f_i(x) > 0$. $\Rightarrow$ nimittäjä $\neq 0 \; \forall x$.
Voidaan siis määr. $\lambda_i : X \to [0,1]$

$$\lambda_i(x) = f_i(x) \Big/ \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

- $\lambda_i(x) \geq 0$, koska $f_i(x) \geq 0 \; \forall i, x$
- $\lambda_i(x) \leq 1$, koska $f_i(x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \; \forall i, x$
- jatkuvuus ok.
- lokaalisti äärellisyys selvä, koska peite äärellinen
- $\sum \lambda_i = 1$ kuten tehtävässä 2
- $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset U_i$:

  Nyt $\{x \in X \mid \lambda_i(x) \neq 0\} \subset V_i$, joten

  $$\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset \overline{V_i} \subset U_i.$$

$\square$

Osoitetaan Lauseen 5.12 ehto (2).

6. Valitaan ensin B:lle avoin peite (U_i) s.e. $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i$.
Kompaktisuuden nojalla voidaan valita äärellinen osapeite $(U_i)_{i=1}^n$, edelleen siis $\xi|U_i$ on triviaali.
Koska kompakti Hausdorffin avaruus B on normaali ([Väisälä, 15.12.]), on tehtävän 5 nojalla olemassa peitteelle $(U_i)_{i=1}^n$ alistettu ykkösen ositus.
Ehto (2) on siis voimassa.

$\square$