Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 10 (20.11.2014)

1. Olk. $\xi = \eta = \varepsilon^1_{\mathbb{R}}$, $g(t,x) = (t, tx)$,
eli säikeellä F_t g on lineaarikuvaus $x \mapsto tx$.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & \mathbb{R} \end{array}$$

Ovatko $(Im(g), \pi_2|_{Im(g)}, \mathbb{R})$ ja
$(ker(g), \pi_1|_{ker(g)}, \mathbb{R})$
vektorikimppuja? $(ker(g) = \{(t,x) \mid g(t,x) = (t,0)\})$

2. (Luennot, s. 55)
Osoita, että q_0 on tekijäkuvaus.

3. (Luennot, s. 55)
Osoita, että $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ on kompakti.

4. a) Osoita, että jokainen $\mathbb{R}^{n+1}$:n origon kautta kulkeva suora leikkaa pallon S^n täsmälleen kahdessa pisteessä.
(Huom. origon kautta kulkeva suora on 1-ulotteinen vektorialiavaruus)

b) Osoita, että funktio $\varphi : \mathbb{R}P^n \to G_1(\mathbb{R}^{n+1})$
$[x] \longmapsto$ origon ja pisteen x kautta kulkeva suora

on homeomorfismi.

5. Lauseen 4.6. todistuksessa määriteltiin kantakuvaukseksi
$$g' : U \times \mathbb{R}^n \to g(U \times \mathbb{R}^n)$$
$$(b, x) \longmapsto (b, g_b(x)).$$
Osoita yksityiskohtaisesti tämän funktion käänteisfunktion jatkuvuus.

6. Tarkastellaan väitteitä
(a) On olemassa jatkuva $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ s.e. $f(x) \perp x$ $\forall x \in S^{n-1}$
(siis ei-missään-häviävä vektorikenttä)
(b) On olemassa jatkuva $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ s.e. g:llä ei ole kiintopisteitä ja $g(x) \neq -x$ $\forall x \in S^{n-1}$.

Osoita, että (a) $\Leftrightarrow$ (b).
(Tarvittaessa vihjeitä luennolla ...)