Homotopia ja vektorikimput
Harj. 10, Ratkaisuja

1. Nyt $\mathrm{Im}(g) = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R} \cup \{(0,0)\}$
eli säie $\pi_2^{-1}(t) \approx \mathbb{R}$, kun $t \neq 0$
$\approx \{0\}$, kun $t = 0$.
Vastaavasti $\ker(g) = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\{0\} \cup \{0\}\times\mathbb{R}$
eli säie $\pi_1^{-1}(t) \approx \{0\}$, kun $t \neq 0$
$\approx \mathbb{R}$, kun $t = 0$.
Vektorikimpussa säikeiden tulee olla samandimensioisia vekt. avaruuksia, joten tässä ker ja Im eivät ole vektorikimppuja.

2. olk. $F \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ s.e. $q_0^{-1}(F) \Subset V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$.
väite. $F \Subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.
tod. On siis osoitettava, että $q^{-1}(F) \Subset V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.
Nyt $q^{-1}(F) = (\text{Gram-Schmidt})^{-1}\underbrace{q_0^{-1}(F)}_{\Subset V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})} \Subset V_n(\mathbb{R}^{n+k})$, koska G-S on jatkuva.
$\square$

Siis saatiin $q_0^{-1}(F) \Subset V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \Rightarrow F \Subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$
Implikaatio "$\Leftarrow$" seuraa siitä, että $q_0 = q|$ on jatkuva.
q_0 on surjektio, koska jokaiselle n-tasolle voidaan löytää ortonormaali kanta.

3. $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \subset V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \overbrace{\mathbb{R}^{n+k}\times\dots\times\mathbb{R}^{n+k}}^{n\text{ kpl}}$

- Jos $(x_1,\dots,x_n) \in V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$, on $\|x_i\| = 1 \ \forall i$, jolloin $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{1^2+\dots+1^2} = \sqrt{n}$. n on tässä kiinteä, joten $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ on rajoitettu.
- vektorijono $(x_1,\dots,x_n)$ on ortonormaali $\Leftrightarrow$ $x_i \cdot x_j = 0 \ \forall i \neq j$ ja $x_i \cdot x_i = 1 \ \forall i$.

Jos $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$, merk. $A_{ij} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \cdot x_j = 0\}$, jolloin $A_{ij} \Subset \mathbb{R}^{n+k}\times\dots\times\mathbb{R}^{n+k}$ (pisteen 0 alkukuva jatk. kuvauksessa).
Merk. lisäksi $B_i = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \cdot x_i = 1\} \Subset \mathbb{R}^{n+k}\times\dots\times\mathbb{R}^{n+k}$.
Nyt
$$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) = \bigcap_{\substack{i,j\in\{1,\dots,n\}\\ i\neq j}} A_{ij} \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i \Subset \mathbb{R}^{n+k}\times\dots\times\mathbb{R}^{n+k}.$$

- Siis $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \mathbb{R}^{n+k}\times\dots\times\mathbb{R}^{n+k}$ on suljettu ja rajoitettu, eli se on kompakti.

$\square$

4. a) Tarkastellaan suoraa $\{ t x \mid t \in \mathbb{R} \}$, missä $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$;
t:n arvolla $\frac{1}{\|x\|}$ on $\| t x \| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$, samoin t:n arvolla $-\frac{1}{\|x\|}$.
Selvästi $\frac{1}{\|x\|} x \neq -\frac{1}{\|x\|} x$ (x:ssä on ainakin yksi koordinaatti $\neq 0$, jolloin nämä eroavat siinä koordinaatissa).
Lisäksi jos $|t| < \frac{1}{\|x\|}$, on $\|t x\| = |t| \|x\| < 1$, eli $t x \notin S^n$
ja jos $|t| > \frac{1}{\|x\|}$, on $\|t x\| = |t| \|x\| > 1$, eli $t x \notin S^n$.
Siis suora leikkaa S^n:n täsmälleen kahdessa pisteessä.

b)
- φ on hyvin määritelty, koska jos suora kulkee origon ja pisteen x kautta, niin se kulkee myös pisteen $-x$ kautta.
- φ on surjektio a)-kohdan nojalla: jos l on origon kautta kulkeva suora, niin löytyy $x \in S^n$ s.e. $x \in l$. Tällöin $\varphi([x]) = l$.
- φ on injektio: jos $x, y \in S^n$ ja "origon ja x:n kautta kulkeva suora" = "origon ja y:n kautta kulkeva suora", niin a)-kohdan nojalla $x = y$ tai $x = -y$. Siis $[x] = [y]$ ja φ on injektio.
- osoitetaan kuvauksen φ^{-1} jatkuvuus:
Havaitaan ensin, että $V_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$.
Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} V_1(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & S^n \arrow[d, "p"] \\ G_1(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \frac{x}{\|x\|} \arrow[d, mapsto] \\ \mathrm{span}(x) & \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \end{tikzcd}$$

= origon ja x:n kautta kulkeva suora

Kaavio kommutoi, koska "origon ja x:n kautta kulkeva suora" = "origon ja $\frac{x}{\|x\|}$:n kautta kulkeva suora".
Kaaviossa $p \circ f$ on jatkuva ja q on tekijäkuvaus, joten φ^{-1} on jatkuva.
- Siis φ^{-1} on jatkuva bijektio. Koska $G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ on kompakti (ja $\mathbb{R}P^n$ Hausdorff), on φ^{-1} homeomorfismi. Siis myös φ on homeomorfismi.

$\square$

5. Kuvauksen $g: B \to M_{n,n+k}$ jatkuvuus todistetaan kuten s. 48:

Matriisin $g(b)$ i. sarake $c_i(b)$ on b:n jatkuva funktio:

$$b \longmapsto (b, e_i) \xmapsto[(b,x)\mapsto(b,g_b(x))]{\qquad} (b, c_i(b)) \longmapsto c_i(b).$$

Matriisimerkinnän helpottamiseksi määritellään $\bar h_b : \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}$:

olk. $v_1,\dots,v_k$ V:n kanta ja $A \in M_{n+k,k}(\mathbb{R})$ s.e. $Ae_i = v_i$, $1\le i\le k$.

Määr. $\bar h_b : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \oplus V \xrightarrow{h_b} \mathbb{R}^{n+k}$

$$(x,y) \longmapsto (x, Ay) \longmapsto g_b(x) + Ay.$$

(*) $\bar h_b$:n matriisin alkiot ovat siis matriisin g_b alkioita + vakioita b:n suhteen, joten $b \mapsto \bar h_b$ on jatkuva $B \to M_{n+k,n+k}$.

Nyt (kuten Lauseen todistuksessa) $\bar h_b$ on kääntyvä jossain b_0:n ympäristössä U, ja saadaan jatkuva funktio $U \to Gl(n+k,\mathbb{R}) \to Gl(n+k,\mathbb{R})$

$$b \longmapsto \bar h_b \longmapsto \bar h_b^{-1}.$$

Koska $g_b^{-1} = pr \circ \bar h_b^{-1}$, ovat matriisin g_b^{-1} alkiot matriisin $\bar h_b^{-1}$ alkioita, eli $b \mapsto g_b^{-1}$ on jatkuva.

Olk. nyt $(b,y) = (b, g_b(x)) \in g(U\times\mathbb{R}^n)$.

Yhdistetty kuvaus $g(U\times \mathbb{R}^n) \longrightarrow g(U\times\mathbb{R}^n)\times M_{n+k,n} \longrightarrow U\times\mathbb{R}^n$

$$(b,y) \longmapsto (b,y,g_b^{-1}) \longmapsto (b, g_b^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriisitulo}}}{\cdot} y) = (b,x)$$

on jatkuva, ja tämä on k.o. käänteiskuvaus.

□

(*) Itse asiassa $\bar h_b$:n matriisi on $\left(g(b) \,\vdots\, A\right) \in M_{n+k,n+k}$,

missä $g(b)\in M_{n+k,n}$ on kuten ratkaisun alussa ja $A\in M_{n+k,k}$.

6. $\underline{(a)\Rightarrow(b)}$: jos f on kuten ehdossa (a), määritellään

$g: S^{n-1}\to S^{n-1}$ kaavalla $g(x) = \dfrac{x+f(x)}{|x+f(x)|}$.

- nimittäjä $\neq 0$, koska aina $x\neq\bar 0$, $f(x)\neq \bar 0$ ja $f(x)\perp x$, jolloin ei voi olla $f(x)=-x$.
- selvästi $g(x)\in S^{n-1}$ $\forall x$ ja g on jatkuva.
- jos olisi $g(x)=x$, niin $\dfrac{f(x)+x}{|f(x)+x|} = x \Rightarrow f(x)+x = |f(x)+x|\,x$
  $\Rightarrow f(x) = \underbrace{(|f(x)+x|-1)}_{\in\mathbb{R}}\, x$: ristiriita, koska $f(x)\perp x$
- jos olisi $g(x)=-x$, niin $\dots$ $f(x) = (-|f(x)+x|-1)\,x$, ristiriita, koska $f(x)\perp x$.

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$: olk. g kuten ehdossa (b). Määr.

$$f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \quad \text{kaavalla}$$

$$f(x) = g(x) - \underbrace{(g(x) \cdot x)\, x}_{\text{vektorin } g(x) \text{ projektio vektorille } x}$$

- $f(x) \neq \bar{0}$: jos olisi $g(x) - (g(x) \cdot x) x = \bar{0}$, niin $g(x) = \underbrace{(g(x) \cdot x)}_{\in \mathbb{R}} x$, koska $x, g(x) \in S^{n-1}$, olisi $g(x) = \pm x$, ristiriita
- f on jatkuva, ok.
- $f(x) \perp x$:

$$f(x) \cdot x = \big(g(x) - (g(x) \cdot x) x\big) \cdot x$$
$$= g(x) \cdot x - (g(x) \cdot x) \underbrace{x \cdot x}_{=1, \text{ koska } x \in S^{n-1}} = 0, \text{ joten } f(x) \perp x.$$

$\square$