6. Vektorikimppujen luokittelu

Edellisessä luvussa osoitettiin, että jokaiseen numeroituvatyyppiseen vektorikimppuun $\xi^n \downarrow B$ liittyy kuvaus $f : B \to G_n$ s.e. $\xi^n \cong f^*\gamma^n$. Sanomme, että f on kimpun ξ luokittelukuvaus.
Lisäksi jos $\eta^n \overset{\theta}{\cong} \xi^n$, saadaan toisaalta kimpulle η^n luokittelukuvaus $g : B \to G_n$, toisaalta myös luokittelukuvaus isomorfismin θ välityksellä:

$$\begin{tikzcd}
E(\eta^n) \arrow[r, "\cong", "\theta"'] \arrow[d] & E(\xi^n) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^n(\mathbb{R}^\infty) \arrow[d] \\
B \arrow[r, "id"] & B \arrow[r, "f"] & G_n .
\end{tikzcd}$$

Lauseen 5.36 nojalla $f \simeq g$.
Jos merkitään

$$\mathrm{Vect}_n(B) = \{B\text{:n numeroituvatyyppisten } \mathbb{R}^n\text{-kimppujen } \xi \text{ isomorfialuokat } \{\xi\}\}$$

ja

$$[B, G_n] = \{\text{jatkuvien kuvausten } f : B \to G_n \text{ homotopialuokat } [f]\},$$

on siis olemassa hyvinmääritelty kuvaus

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Vect}_n(B) &\longrightarrow [B, G_n] \\ \{\xi\} &\longmapsto [f] \end{aligned} \quad , \quad \text{missä } \xi \cong f^*\gamma^n,$$

joka on selvästi surjektio: kuvaus $f : B \to G_n$ on kimpun $f^*\gamma^n$ luokittelukuvaus.

Tämän luvun päätavoite on osoittaa, että $(*)$ on myös injektio, t.s. että homotooppiset kuvaukset indusoivat isomorfiset kimput. Siten numeroituvatyyppisten vektorikimppujen (ja parakompakteilla avaruuksilla siis kaikkien vektorikimppujen) luokittelu palautuu homotopiaongelmaan.

Kimput $B \times I$:n päällä

Lemma 6.1. Ol. $\xi = (E, p, B \times [a,b])$ $\mathbb{R}^n$-kimppu. Jos $\xi|B \times [a,c]$ ja $\xi|B \times [c,b]$ ovat triviaaleja, niin ξ on triviaali $(a < c < b)$.

Tod. Merk. $C = B \times [a,b]$, $C_1 = B \times [a,c]$, $C_2 = B \times [c,b]$ ja $E_i = p^{-1}C_i$, $i = 1,2$.
Valitaan isomorfismit

$$u_i : C_i \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} E_i \quad , \quad i = 1,2,$$

ja merkitään niiden rajoittumia joukkoon $(C_1 \cap C_2) \times \mathbb{R}^n$

$$v_i : (B \times \{c\}) \times \mathbb{R}^n \overset{\cong}{\to} p^{-1}(B \times \{c\}) \quad , \quad i = 1,2.$$

Tällöin $h = v_2^{-1} v_1$ on triviaalin kimpun $(B \times \{c\}) \times \mathbb{R}^n$ automorfismi ja siis muotoa

$$h((x,c),v) = ((x,c), g(x)v) \quad , \quad x \in B, v \in \mathbb{R}^n,$$

missä $g : B \to Gl(n,\mathbb{R})$ on jatkuva kuvaus. Jatketaan h kimpun $C_2 \times \mathbb{R}^n$ automorfismiksi w kaavalla

$$w((x,t),v) = ((x,t), g(x)v) \quad , (x,t) \in B \times [c,b], v \in \mathbb{R}^n.$$

Tällöin kimppuisomorfismit $u_1 : C_1 \times \mathbb{R}^n \to E_1$ ja $u_2 w : C_2 \times \mathbb{R}^n \to E_2$ yhtyvät leikkauksella $(C_1 \cap C_2) \times \mathbb{R}^n$. Koska $C_i \times \mathbb{R}^n \subset C \times \mathbb{R}^n$ on suljettu, $i = 1,2$, ne määrittelevät yhdessä kimppuisomorfismin

$$u : C \times \mathbb{R}^n \to E$$

$$\text{s.e.} \quad u|_{C_1 \times \mathbb{R}^n} = u_1 \ , \ u|_{C_2 \times \mathbb{R}^n} = u_2 w .$$

$\square$

<u>Seuraus 6.2.</u> Jos $\xi \downarrow B \times I$ on $\mathbb{R}^n$-kimppu ja on olemassa jako $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ s.e. $\xi|_{B \times [t_{i-1}, t_i]}$ on triviaali $\forall i = 1,\dots,k$, niin ξ on triviaali.

<u>Tod.</u> Lemma 6.1 ja induktio.

$\square$

Osoitamme nyt, että jokaisella vektorikimpulla $\xi \downarrow B \times I$ voidaan B peittää avoimilla joukoilla U_i, $i \in I$ s.e. $\xi|_{U_i \times I}$ on triviaali $\forall i$, ja että numeroituvatyyppisillä kimpuilla ykkösen ositukset voidaan kuljettaa mukana. Ensimmäinen väite seuraa I:in kompaktisuudesta:

<u>Lemma 6.3.</u> Olkoon $\xi \downarrow B \times I$ $\mathbb{R}^n$-kimppu. Tällöin on olemassa B:n avoin peite $(U_i)_{i \in I}$ s.e. $\xi|_{U_i \times I}$ on triviaali $\forall i \in I$.

<u>Tod.</u> Olkoon $b \in B$. Jokaisella $t \in I$ on olemassa avoimet $U(t) \subset B$ ja $V(t) \subset I$ s.e. $(b,t) \in U(t) \times V(t)$ ja $\xi|_{U(t) \times V(t)}$ on triviaali. Koska I on kompakti, on olemassa $\lambda > 0$ s.e. jokainen osaväli $J \subset I$, jonka pituus on $< \lambda$, sisältyy johonkin joukkoon $V(t)$ (peitteen $(V(t))_{t \in I}$ Lebesgue-luku). Val. $k \in \mathbb{N}$ s.e. $\frac{1}{k} < \lambda$. Tällöin $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ sisältyy johonkin joukkoon $V(t_i)$ $\forall i = 1,\dots,k$, joten on olemassa b:n avoimet ympäristöt U_i s.e.

$$\xi|_{U_i \times [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} \quad \text{on triviaali} \quad \forall i = 1,\dots,k.$$

Leikkaus $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ on b:n avoin ympäristö, jolle $\xi|_{U \times [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]}$ on triviaali $\forall i = 1,\dots,k$. Seurauksen 6.2 nojalla $\xi|_{U \times I}$ on triviaali.

$\square$

Lemma 6.4. Olkoon $\xi \downarrow B\times I$ numeroituvatyyppinen $\mathbb{R}^n$-kimppu. Tällöin on olemassa B:n avoin peite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja sille alistettu ykkösen ositus $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s.e. $\xi|_{U_k\times I}$ on triviaali $\forall\, k\in\mathbb{N}$.

Tod. Lauseen 5.30 nojalla avaruudella $B\times I$ on numeroituva avoin peite $\mathcal{W}$ ja sille alistettu ykkösen ositus (π_W) s.e. $\xi|_W$ on triviaali $\forall\, W\in\mathcal{W}$.
Jokaista $\mathcal{W}$:n r-jonoa $(W_1,\dots,W_r)$ kohden merkitään

$$U(W_1,\dots,W_r) = \{ b\in B \mid \{b\}\times[\tfrac{i-1}{r},\tfrac{i}{r}] \subset W_i \;\; \forall\, i=1,\dots,r \}.$$

Koska suljettu väli on kompakti, on $U(W_1,\dots,W_r)$ avoin. Näiden joukkojen perhe $\mathcal{U}$ on numeroituva, indeksijoukkona $\bigcup_{r=1}^{\infty}\mathcal{W}^r$.
Os., että $\mathcal{U}$ kelpaa halutuksi B:n peitteeksi.

(1) $\xi|_{U\times I}$ on triviaali $\forall\, U\in\mathcal{U}$: olkoon $U=U(W_1,\dots,W_r)$. Määritelmän mukaan $U\times[\frac{i-1}{r},\frac{i}{r}]\subset W_i$ $\forall\, i=1,\dots,r$. Koska $\xi|_{W_i}$ on triviaali, on myös $\xi|_{U\times[\frac{i-1}{r},\frac{i}{r}]}$ triviaali $\forall\, i=1,\dots,r$. Siten $\xi|_{U\times I}$ on triviaali Seurauksen 6.2 nojalla.

(2) Perhe $\mathcal{U}$ on B:n peite: ol. $b\in B$. Koska I on kompakti, voidaan löytää joukot $W_1,\dots,W_r\in\mathcal{W}$ s.e. $\{b\}\times[\frac{i-1}{r},\frac{i}{r}]\subset \pi_{W_i}^{-1}(0,1]$ $\forall\, i=1,\dots,r$ (vrt. Lemman 6.3 todistus). Tällöin $b\in U(W_1,\dots,W_r)$.

(3) Perheelle $\mathcal{U}$ alistettu ykkösen ositus $(\lambda_U)_{U\in\mathcal{U}}$: (aluksi $r\in\mathbb{N}$ kiinteä)
jokaiselle $U=U(W_1,\dots,W_r)\in\mathcal{U}$ määritellään

$$\rho_U : B \to I \quad \text{kaavalla}$$

$$\rho_U(b) = \min_{1\le i\le r}\, \min\{\pi_{W_i}(b,t) \mid \tfrac{i-1}{r}\le t\le \tfrac{i}{r}\}.$$

ρ_U on jatkuva, koska suljetut välit ovat kompakteja (HT).
Jos $\rho_U(b)>0$, niin $\pi_{W_i}(b,t)>0$, siis $(b,t)\in W_i$ kaikilla t, $\frac{i-1}{r}\le t\le\frac{i}{r}$, ja kaikilla i, joten $b\in U$. Siis $\rho_U^{-1}(0,1]\subset U$.
Jokaisella $(b,t)\in B\times I$ on ympäristö, joka kohtaa vain äärellisen monta joukkoa $\pi_W^{-1}(0,1]$. Koska I on kompakti, on kullakin $b\in B$ ympäristö $V\subset B$ s.e. $V\times I$ kohtaa vain äärellisen monta joukkoa $\pi_W^{-1}(0,1]$, $W\in\mathcal{W}$.
Kiinteällä $r\in\mathbb{N}$ perhe $(\rho_{U(W_1,\dots,W_r)})_{\mathcal{W}^r}$ on siis lok. äärellinen.

Muokataan nyt funktioita ρ_U niin, että saadaan lok. äärellinen perhe.
Olk. $\quad \rho_r(b) = \max\{\rho_{U(W_1,\dots,W_s)}(b) \mid s<r\}$
ja $\quad \sigma_U'(b) = \max(0,\, \rho_U(b) - r\rho_r(b))$, $\quad U=U(W_1,\dots,W_r)$.

Selvästi $\sigma_U'^{-1}(0,1] \subset \varrho_U^{-1}(0,1] \subset U$. Jos $b\in B$, on $\varrho_U(b)>0$ jollain $U = U(W_1,\dots,W_r)$ (kohta (2)). Olkoon U valittu siten, että r on pienin mahdollinen. Tällöin $\sigma_U'(b) = \varrho_U(b) > 0$. Valitaan lisäksi $N>r$ s.e. $N\varrho_U(b)>1$. Jossain b:n ympäristössä V pätee $N\varrho_U(x)>1$ $\forall x\in V$ (jatkuvuus). Tällöin kaikilla $n\geq N$ pätee

$$n\varrho_n(x) \geq N\varrho_n(x) \geq N\varrho_U(x) > 1, \quad x\in V,$$
$$(\uparrow\ n\geq N>r \text{ ja } \varrho_n = \max\dots)$$

ja siten $\sigma_U'|_V = 0$ aina, kun $U = U(W_1,\dots,W_n)$, $n\geq N$. Niinpä perhe $(\sigma_U')_{U\in\mathcal{U}}$ on lokaalisti äärellinen ja $\sum_{\mathcal{U}}\sigma_U' > 0$.
Normeerauksella $\sigma_U = \sigma_U'/\sum \sigma_U'$, $U\in\mathcal{U}$, saadaan ykkösen ositus $(\sigma_U)_{U\in\mathcal{U}}$ s.e. $\sigma_U^{-1}(0,1]\subset U$ $\forall U\in\mathcal{U}$.
Lopuksi Lemman 5.33 konstruktio antaa peitteelle $\mathcal{U}$ alistetun ykkösen osituksen $(\lambda_U)_{U\in\mathcal{U}}$.

□

Lause 6.5. Olkoon $\xi\downarrow B\times I$ numeroituvatyyppinen vektorikimppu. On olemassa kimppukuvaus $f:\xi\to\xi$, jonka kanta-avaruuksille indusoitu kuvaus on $r: B\times I\to B\times I$, $r(b,t) = (b,1)$.

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E(\xi) \arrow[d, "p"] \\ B\times I \arrow[r, "r"] & B\times I \end{tikzcd}$$

Tod. Lemman 6.4 nojalla on olemassa B:n numeroituva peite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja sille alistettu ykkösen ositus $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s.e. $\xi|U_k\times I$ on triviaali $\forall k\in\mathbb{N}$. Valitaan isomorfismit

$$h_k: U_k\times I\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U_k\times I).$$

Merkitään

$$\eta_k = \lambda_k/\max(\lambda_k),$$

jolloin (η_k) on n.s. ykkösen verho: $\operatorname{supp}\eta_k = \operatorname{supp}\lambda_k\subset U_k$ ja $\max_k \eta_k(b) = 1$ $\forall b$.
Määritellään kimppukuvaus

$$f_k: E(\xi)\to E(\xi) \qquad (k\in\mathbb{N})$$
$$\begin{cases} f_k(h_k(b,t,v)) = h_k(b,\max(\eta_k(b),t),v), & (b,t,v)\in U_k\times I\times\mathbb{R}^n, \\ f_k(e) = e, & e\notin p^{-1}(U_k\times I). \end{cases}$$

Sen kanta-avaruuksille indusoima kuvaus on $r_k: B\times I\to B\times I$,

$$r_k(b,t) = (b,\max(\eta_k(b),t)).$$

Kuvaus r voidaan tulkita äärettömänä yhdistettynä kuvauksena

$$r = r_1\circ r_2\circ r_3\circ\dots$$

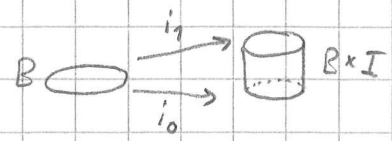
siinä mielessä, että joka pisteellä $b\in B$ on ympäristö $U(b)$ ja luku $n_b\in\mathbb{N}$ s.e. $r_n|_{U(b)\times I} = id$, kun $n>n_b$, ja siis joukossa $U(b)\times I$ on

$$r = r_1\circ\dots\circ r_{n_b}.$$

Samoin tulkittuna $f = f_1\circ f_2\circ\dots$ on kimppukuvaus, joka peittää kuvauksen r.

□

Merk. $i_0, i_1 : B \to B\times I$ inkluusioita
$i_0(b) = (b,0)$, $i_1(b) = (b,1)$, $b \in B$,



Seuraus 6.6. $i_0^*(\xi) \cong i_1^*(\xi)$.

Tod. Kuvaus $(b,e) \longmapsto (b, f(e))$ on kimppuisomorfismi.
(Pal. mieleen: kimpun $i_0^*(\xi)$ kokonaisavaruus $E_1 = \{(b,e) \mid i_0(b) = \pi(e)\} \subset B\times E(\xi)$,
vastaavasti $i_1^*(\xi)$)

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{i_0} & B\times I \end{array},$$

□

Seuraus 6.7. Olkoon $\xi \downarrow B'$ numeroituvatyyppinen vektorikimppu.
Jos $f: B \to B'$ ja $g: B \to B'$ ovat homotooppiset, niin $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$.

Tod. Olk. $F: B\times I \to B'$ homotopia $f \simeq g$. Kimppu $F^*(\xi) \downarrow B\times I$ on numeroituvaa tyyppiä, joten $i_0^* F^*(\xi) \cong i_1^* F^*(\xi)$ Seurauksen 6.6. nojalla.
Koska $Fi_0 = f$ ja $Fi_1 = g$, saadaan
$$f^*(\xi) = (Fi_0)^*(\xi) \cong i_0^* F^*(\xi) \cong i_1^* F^*(\xi) \cong (Fi_1)^*(\xi) = g^*(\xi).$$

□

Vektorikimppujen luokittelu

Olk. B top. avaruus. Merkitään n-ulotteisen vektorikimpun $\xi \downarrow B$ kanssa isomorfisten kimppujen luokkaa $\{\xi\}$ ja numeroituvatyyppisten kimppujen luokkien joukkoa
$$\mathrm{Vect}_n(B) = \{\{\xi\} \mid \xi \downarrow B \text{ numeroituvatyyppinen } \mathbb{R}^n\text{-kimppu}\}.$$

Jos $f: B_1 \to B$ on jatkuva kuvaus, niin $\xi \cong \xi' \Rightarrow f^*\xi \cong f^*\xi'$,
joten f määrittelee funktion
$$\mathrm{Vect}_n(f): \mathrm{Vect}_n(B) \to \mathrm{Vect}_n(B_1), \quad \{\xi\} \longmapsto \{f^*\xi\},$$
joka Seurauksen 6.7 nojalla riippuu vain f:n homotopialuokasta.
Voidaan siis merkitä $\mathrm{Vect}_n([f])$.
Lisäksi funktoriaalisuusehdot
$$\mathrm{Vect}_n(id) = id, \quad \mathrm{Vect}_n(f\circ g) = \mathrm{Vect}_n(g)\circ\mathrm{Vect}_n(f)$$
ovat voimassa (HT).

Merkitään kuvausten $B \to G_n$ ht.luokkien joukkoa
$$[B, G_n] = \{[g] \mid g: B \to G_n \text{ jatkuva kuvaus}\}$$
(missä $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ääretön Grassmannin monisto kuten aiemmin).

Jatkuva kuvaus $f : B_1 \to B$ indusoi hyvin määritellyn kuvauksen

$$[f, G_n] : [B, G_n] \to [B_1, G_n]$$
$$[g] \longmapsto [g \circ f],$$

joka riippuu vain f:n ht.luokasta, joten void. merkitä $[[f], G_n]$.
Funktoriaalisuusehdot

$$[[id], G_n] = id, \quad [[f][h], G_n] = [[h], G_n]\,[[f], G_n]$$

ovat voimassa (HT).

Kaikilla avaruuksilla B voidaan määritellä kuvaus

$$\varphi_B : [B, G_n] \to Vect_n(B)$$
$$\varphi_B[g] = \{g^* \gamma^n\},$$

joka on hyvin määritelty Seurauksen 6.7 nojalla.

Nyt voimme muotoilla numeroituvatyyppisten $\mathbb{R}^n$-kimppujen luokittelun funktoriaalisessa muodossa:

Teoreema 6.8 $\quad \varphi = (\varphi_B)$ on luonnollinen ekvivalenssi, t.s.

(i) $\varphi_B : [B, G_n] \to Vect_n(B)$ on bijektio kaikilla avaruuksilla B

(ii) Jos $f : B_1 \to B$ on jatkuva kuvaus, niin neliö

$$\begin{tikzcd}
{[B, G_n]} \arrow[r, "{[[f], G_n]}"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & {[B_1, G_n]} \arrow[d, "\varphi_{B_1}"] \\
Vect_n(B) \arrow[r, "{Vect_n([f])}"] & Vect_n(B_1)
\end{tikzcd}$$

kommutoi.

Tod. (i) φ_B on surjektio numeroituvatyyppisen kimpun $\xi \downarrow B$ määr. nojalla: Jos $\xi \to \gamma^n$ on kimppukuvaus ja $g : B \to G_n$ on sen kanta-avaruuskuvaus, niin $\xi \cong g^* \gamma^n$, joten $\{\xi\} = \{g^* \gamma^n\} = \varphi_B[g]$. φ_B on injektio Lauseen 5.36 nojalla: jos $\varphi_B[g] = \varphi_B[g']$, niin $g^* \gamma^n \cong g'^* \gamma^n$. Tämän isomorfismin ja kanonisen kimppukuvauksen $g'^* \gamma^n \to \gamma^n$ yhdistetty kimppukuvaus ja toisaalta kanoninen kimppukuvaus $g^* \gamma^n \to \gamma^n$ ovat kimppuhomotooppiset (5.36). Sen kanta-avaruuksille indusoima homotopia on homotopia $g \simeq g'$, siis $[g] = [g']$.

(ii) Jos $[g] \in [B, G_n]$, niin

$$Vect_n([f])\,\varphi_B[g] = Vect_n([f])\{g^* \gamma^n\} = \{f^*(g^* \gamma^n)\}$$
$$= \{(g \circ f)^*(\gamma^n)\} = \varphi_{B_1}[g \circ f] = \varphi_{B_1}[[f], G_n][g].$$

$\square$