Esim. 4.12. $T\mathbb{R}P^n$

Jos $x \in S^n$, niin differentiaali $Tp: TS^n \to T\mathbb{R}P^n$ kuvaa tangenttivektorit (x,v) ja $(-x,-v)$ samalle vektorille $[x,v] \in T_{[x]}\mathbb{R}P^n$ ($v = p'(0) \Rightarrow -v = (-p)'(0)$). $\mathbb{R}P^n$:n tangenttiavaruus koostuu siis pareista $[x,v] = \{(x,v),(-x,-v)\}$:

$$T\mathbb{R}P^n = \{[x,v] \mid x \in S^n, v \in \mathbb{R}^{n+1}, x \cdot v = 0\}.$$

Immersion $\mathbb{R}P^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}P^{n+1}$, $[x] \mapsto [(x,0)]$ indusoiman kimpun $i^*T\mathbb{R}P^{n+1}$ kokonaisavaruus koostuu pareista $[x,(v,t)]$; $[x,v] \in T\mathbb{R}P^n$, $t \in \mathbb{R}$. Normaalikimppu ν_i saadaan siis pareista $[x,t] = \{(x,t),(-x,-t)\}$ eli se on isomorfinen kanonisen suorakimpun γ_n^1 kanssa (kts. Esim. 3.3 d)), kuvauksen $\gamma_n^1 \to \nu_i$, $([x], tx) \mapsto [x,t]$ välityksellä. Saadaan

$$i^*T\mathbb{R}P^{n+1} \cong T\mathbb{R}P^n \oplus \gamma_n^1 .$$

5. Grassmannin monistot ja universaalikimput

Esim. 5.1. Ol. $M^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sileä käyrä (eli sileä 1-monisto). Vastaavuus

$$f: x \longmapsto \text{tangenttisuora } T_xM \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \in M$$

on jatkuva kuvaus $f: M \to \mathbb{R}P^n$. (tangenttisuora siirretty kulkemaan origon kautta)

Samoin, jos $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on sileä hyperpinta (eli sileä kodimensiota 1 oleva alimonisto), niin vastaavuus

$$n: x \longmapsto \text{normaalisuora } L_x = (T_xM)^{\perp} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

määrittelee jatkuvan kuvauksen $n: M \to \mathbb{R}P^n$. (Nämä ideat ovat peräisin jo Gaussilta.)

Ensimmäisessä tapauksessa tangenttikimppu TM on kanonisen suorakimpun $\gamma_n^1 \downarrow \mathbb{R}P^n$ indusoima: $(x,v) \mapsto (T_xM, v)$ on kimppukuvaus, joten Lemma 4.4. $\Rightarrow TM \cong f^*\gamma_n^1$. Toisessa tapauksessa normaalikimppu ν_M on samoin indusoitu kimppu: $\nu_M \cong n^*\gamma_n^1$.

Yleisesti, jos $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on sileä n-monisto, niin

$$x \longmapsto T_xM \subset \mathbb{R}^{n+k}, \quad x \in M$$

on kuvaus $M \to \{n\text{-ulotteiset aliavaruudet } \mathbb{R}^{n+k}\text{:ssa}\}$.

Määrittelemme nyt tarkemmin tämän joukon.

Määr. 5.2. *n-taso* $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on n-ulotteinen vektorialiavaruus $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$;
n-runko $(x_1, \dots, x_n)$ $\mathbb{R}^{n+k}$:ssa on vapaa vektorijono $\mathbb{R}^{n+k}$:ssa.

$$G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{ V \mid V \subset \mathbb{R}^{n+k} \ n\text{-taso} \}, \quad \underline{\text{Grassmannin monisto}}$$
$$V_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \ n\text{-runko} \}, \quad \underline{\text{Stiefelin monisto}}.$$

Stiefelin monisto topologisoidaan aliavaruutena $V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \underbrace{\mathbb{R}^{n+k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+k}}_{n \text{ kpl}} \approx \mathbb{R}^{n(n+k)}$
ja Grassmanin monisto sen tekijäavaruutena kuvauksen
$$q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \operatorname{span}(x_1, \dots, x_n)$$
suhteen.

Merkitään $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \subset V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ortonormaalien n-runkojen osajoukko.
Tarkastellaan kaaviota

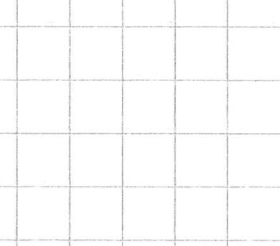
$$\begin{array}{ccccc} V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) & \subset & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} & V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \\ & \searrow^{q_0} & \downarrow q & \swarrow_{q_0} & \\ & & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & & \end{array}$$

Kaavio kommutoi ja nähdään, että $q_0 = q|$ on tekijäkuvaus (HT).
Siis avaruuden $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ topologia voitaisiin määritellä tekijätopologiana myös kuvauksen q_0 suhteen.
Voidaan myös osoittaa, että $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$ on $\mathbb{R}^{n(n+k)}$:n rajoitettu ja suljettu osajoukko (HT), siis kompakti.

Huom. Tapauksessa $n = 1$ on $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$.

Lause 5.3. Grassmannin monisto $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on kompakti (nk)-ulotteinen monisto.

Tod. 1° $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on Hausdorffin avaruus:
olk. $X, Y \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, $X \neq Y$.
Osoitetaan, että on olemassa jatkuva $f : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$ s.e. $f(X) \neq f(Y)$, mistä väite seuraa.
Olk. $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ kiinteä. Funktio
$$f_v : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}, \quad f_v(Z) = d(v, Z)^2$$
on jatkuva, koska yhdistetty funktio
$$f_v \circ q_0 : V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$$
on jatkuva kuvaus
$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \|v\|^2 - (v \cdot z_1)^2 - \dots - (v \cdot z_n)^2.$$



$v_Z = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot z_i) z_i$

Valitaan nyt $v \in \bar{X} \setminus Y$. Tällöin $f_v(\bar{X}) = 0$, koska $v \in \bar{X}$, mutta $f_v(Y) > 0$, koska $v \notin Y$.

2° $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on kompakti, koska $V_n^0(\mathbb{R}^{n+1})$ on kompakti ja $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = q_0(V_n^0(\mathbb{R}^{n+1}))$.

3° Jokaisella pisteellä $\bar{X}_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on ympäristö $U \approx \mathbb{R}^{nk}$:
Kirjoittamalla n-rungon $(x_1, \dots, x_n)$ vektorit matriisin riveiksi $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ voidaan Stiefelin monistoa pitää aliavaruutena $V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset M_{n,n+k}(\mathbb{R})$.
Tällöin $(\bar{X}, Y \in V_n(\mathbb{R}^{n+k}))$

$$(*) \quad q(\bar{X}) = q(Y) \iff \bar{X} = AY \text{ jollain } A \in Gl(n,\mathbb{R})$$

(A on kannanvaihtomatriisi).
Valitaan n-runko $\bar{X} \in V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ s.e. $q(\bar{X}) = \bar{X}_0$.
Koska $\operatorname{rank}(\bar{X}) = n$ (vektorit $x_1, \dots, x_n$ virittävät n-ulotteisen aliavaruuden), voidaan (numeroimalla koordinaatit tarvittaessa uudelleen) olettaa, että $\bar{X} = (\bar{X}_1 \ \bar{X}_2)$, missä $\bar{X}_1 \in Gl(n,\mathbb{R})$ (matriisissa $\bar{X}$ on n lin. riippumatonta saraketta).
[$\operatorname{rank}(\bar{X}) = \dim \operatorname{Col}(\bar{X}) = \dim \operatorname{Row}(\bar{X})$, Honkasalo: Lin.alg., s. 57].
Joukko

$$V = \{(P\,Q) \mid P \in Gl(n,\mathbb{R}),\ Q \text{ mikä tahansa}\} \subset V_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

on avoin, koska se voidaan määritellä determinanttiehdolla.
Ehdon $(*)$ nojalla pätee $q^{-1}qV = V$ ("$\supset$" selvä; "$\subset$" jos $Y \in q^{-1}qV$, niin $q(Y) = q(\underbrace{P\,Q}_{\in V}) \overset{(*)}{\Rightarrow} Y = \underbrace{A}_{\in Gl(n,\mathbb{R})}(P\ Q) = (\underbrace{AP}_{\in Gl(n,\mathbb{R})}\ AQ) \in V$).

Siis $U = qV \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on avoin, lisäksi $\bar{X}_0 \in U$.
Väite. $U \approx \mathbb{R}^{nk}$.
Tod. Kuvaus $\varphi: V \to \mathbb{R}^{nk}$, $\varphi(PQ) = P^{-1}Q$ on jatkuva, koska sen koordinaatit ovat rationaalisia.
Se faktoroituu jatkuvaksi kuvaukseksi $f: U \to \mathbb{R}^{nk}$, koska

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^{nk} \end{tikzcd}$$

$$q(P_1 Q_1) = q(P_2 Q_2) \overset{(*)}{\Rightarrow} (P_1\ Q_1) = A(P_2\ Q_2) = (AP_2\ AQ_2),\ A \in Gl(n,\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \varphi(P_1 Q_1) = (A \cdot P_2)^{-1} A \cdot Q_2 = P_2^{-1} Q_2 = \varphi(P_2 Q_2).$$

Kuvaus f on homeomorfismi käänteiskuvauksena

$$g: \mathbb{R}^{nk} = M_{n,k}(\mathbb{R}) \to U$$
$$g(Q) = q(I\,Q).$$

□ 3°

4° $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$:lla on numeroituva topologian kanta, koska kompaktina avaruutena se voidaan peittää äärellisen monella koordinaattialueella $U \approx \mathbb{R}^{nk}$ ja $\mathbb{R}^{nk}$:lla on numeroituva kanta.

□ 5.3.

16.11.11 →

Huom. 5.4. 1) Reaalisen projektiivisen avaruuden $\mathbb{R}P^k = G_1(\mathbb{R}^{k+1})$ tapauksessa kohdan 3° kartat ovat muotoa

$$h_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}P^k, \quad h_i(x_1, \ldots, x_k) = [x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k],$$

origon ja pisteen $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ kautta kulkeva suora, $1 \leq i \leq k+1$.

Koordinaattiympäristöt ovat entuudesta tutut $U_i = \{[x] \in \mathbb{R}P^k \mid x_i \neq 0\}$

2) Voidaan osoittaa, että Grassmannin monisto voidaan varustaa sileän moniston rakenteella upottamalla

$$P : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to M_{n+k}(\mathbb{R})$$
$$\bar{X} \longmapsto P_{\bar{X}} = \text{kohtisuora projektio } n\text{-tasolle } \bar{X}.$$

Upotuksen P kuva ovat symmetriset $(n+k)$-matriisit P, joille $P^2 = P$ ja $tr(P) = n$. ($tr([a_{ij}]) = \sum_i a_{ii}$, diagonaalialkioiden summa, tr = trace, matriisin jälki)

Määritellään seuraavaksi monistolla $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ kanoninen $\mathbb{R}^n$-kimppu $\gamma^n = \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$:

$$(5.5) \qquad E(\gamma^n) = \{(\bar{X}, v) \mid \bar{X} \subset \mathbb{R}^{n+k}\ n\text{-taso},\ v \in \bar{X}\} \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$$

aliavaruustopologialla varustettuna, $\pi(\bar{X}, v) = \bar{X}$ ja säie $F_{\bar{X}} = \bar{X} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ vektorialiavaruutena.

$\{\bar{X}\} \times \bar{X}$

Lemma 5.6. $\gamma^n \downarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on lokaalisti triviaali.

Tod. Os., että γ^n on triviaali koordinaattiympäristöllä $U \approx \mathbb{R}^{nk}$.

Määr. $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) \subset E(\gamma^n)$ kaavalla

$$h(\bar{X}, (x_1, \ldots, x_n)) = (\bar{X}, (x_1 \cdots x_n)(I_n \ Q)),$$

missä $\bar{X} = q(\bar{X}_1\ \bar{X}_2)$, $Q = \bar{X}_1^{-1}\bar{X}_2$ (Vrt. Lause 5.3, 3°).

Tällöin h on isomorfismi säikeillä ja h^{-1} on jatkuva projektion

$$G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} \to U \times \mathbb{R}^n$$
$$(\bar{X}, (y_1, \ldots, y_{n+k})) \mapsto (\bar{X}, (y_1, \ldots, y_n))$$

rajoittumana.

$\square$

Esim. 5.7. 01. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ sileä monisto. Kuvaus

$$f : M^n \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$
$$f(x) = T_x M \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

on jatkuva: jos $h : U \to M$ on koordinaatisto pisteen x ympärillä, $h(0) = x$, niin Lause 2.11 $\Rightarrow$

$$T_{h(u)}M = \operatorname{span}\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(u)\right), \ u \in U.$$

Koska $g : (x,v) \mapsto (T_xM, v)$ määrittelee kimppukuvauksen
$$TM \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}),$$
on
$$TM \cong f^*\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}).$$

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E(\gamma^n) \arrow[d] \\ M^n \arrow[r, "f"] & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{tikzcd}$$

Kaikki tangenttikimput saadaan siis indusoimalla kanonisesta kimpusta.
Tutkimme seuraavaksi tämän esimerkin yleistystä muille kuin tangenttikimpuille.

Määr. 5.8.

Ol. X topologinen avaruus. Kuvauksen $f : X \to \mathbb{R}$ kantaja (engl. support)
$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subset X.$$

Perhe $(\lambda_i)_{i\in I}$ on X:n ykkösen ositus (engl. partition of unity), jos
(1) $\lambda_i : X \to I$ on jatkuva $\forall i \in I$
(2) perhe $(\operatorname{supp}(\lambda_i))_{i\in I}$ on lokaalisti äärellinen, eli
$\forall x \in X \ \exists$ ympäristö V_x s.e. joukko
$\{i \in I \mid \operatorname{supp}(\lambda_i) \cap V_x \neq \emptyset\}$ on äärellinen.
(3) $\sum_{i\in I} \lambda_i(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

(Huom. jos $x \in X$, niin (2) $\Rightarrow \exists$ ympäristö V_x, jossa summa (3) on äärellinen)

Ykkösen ositus $(\lambda_i)_{i\in I}$ on peitteelle $(U_i)_{i\in I}$ alistettu, jos $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset U_i \ \forall i \in I$.

Esim. 5.9. →

Äärellistyyppiset kimput

Lemma 5.10. Ol. $\xi \downarrow B$ $\mathbb{R}^n$-kimppu. Monomorfismi $f : \xi \to \varepsilon_B^{n+k}$ määrittelee kimppukuvauksen $\xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Tod. f kuvaa säikeen $F_b(\xi)$ tulolle $b \times X_b$, missä $X_b \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on n-taso. Määritellään
$$\bar{g}(b) = X_b \ ; \ g(c) = (X_b, x), \text{ kun } f(c) = (b,x).$$
Koska f on monomorfismi, g on isomorfismi säikeillä. Kuvaus g on haluttu kimppukuvaus, kunhan osoitamme, että g ja $\bar{g}$ ovat jatkuvia.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E(\gamma^n) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\bar{g}"] & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{tikzcd}$$

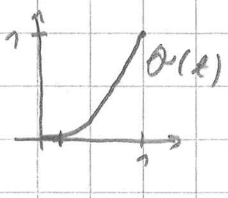
Esim. 5.9.

(Pal. mieleen Määr. 5.2)

$$\begin{array}{c} V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \subset M_{n,n+k}(\mathbb{R}) \\ q_0 \big\downarrow \text{ tekijäkuvaus} \\ G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{array}$$

Grassmanin monisto $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on avaruuden
$$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}^{n+k},\ x_i \cdot x_j = \delta_{ij} \right\}$$
tekijäavaruus relaation
$$(*) \quad q_0(X) = q_0(Y) \iff X = AY \text{ jollain } A \in O(n)$$
suhteen (ortogonaalisten kantojen välinen kannanvaihtomatriisi on ortogonaalinen).
Valitsemalla n saraketta voidaan $n \times (n+k)$-matriisista muodostaa $\binom{n+k}{n}$ kpl alideterminantteja, merkitään näitä
$$\det_i : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le \binom{n+k}{n}.$$
Lauseen 5.3 kohdassa 3° on todistettu, että avoimet joukot
$$U_i = q_0 \det_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad 1 \le i \le \binom{n+k}{n},$$
ovat avaruuden $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ peite koordinaattiympäristöillä.
Konstruoimme peitteelle (U_i) alistetun ykkösen osituksen (λ_i).

Määr. funktiot $\varphi_i : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$, $\varphi_i = (\det_i)^2$, $1 \le i \le \binom{n+k}{n}$.
Koska ortogonaalisen matriisin determinantti on ± 1, faktoroituu φ_i jatkuvaksi funktioksi $f_i : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$
$(q_0(X) = q_0(Y) \Rightarrow X = AY \Rightarrow \det_i(X) = \det(A) \cdot \det_i(Y) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi_i(X) = \varphi_i(Y))$.
Jokaisella $X \in V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ on jokin $\det_i \neq 0$, koska $\operatorname{rank}(X) = n$.
Siis $\sum f_i > 0 \ \forall X$ ja voidaan määritellä ykkösen ositus (ψ_i)
$$\psi_i = \frac{f_i}{\sum f_i}, \quad 1 \le i \le \binom{n+k}{n}.$$
Nyt $\psi_i^{-1}(0,1] = f_i^{-1}(0,\infty) = U_i$. Muokataan funktioita ψ_i vielä siten, että saadaan perheelle (U_i) alistettu ykkösen ositus.
Valitaan jatkuva funktio $\theta : [0,1] \to [0,1]$ s.e.
$\theta(t) = 0$, kun $t \le \left(2\binom{n+k}{n}\right)^{-1}$ ja $\theta(t) > 0$ muuten.



Tällöin funktiot $\lambda_i' = \theta \circ \psi_i$ toteuttavat $\operatorname{supp}(\lambda_i') \subset U_i$ ja $\sum \lambda_i' > 0$ (HT).
Normeerauksella $\lambda_i = \dfrac{\lambda_i'}{\sum \lambda_i'}$ saadaan haluttu ykkösen ositus (λ_i). $\square$

21.11.11

Koska kysymys on lokaali, voidaan olettaa, että ξ on triviaali kimppu, jolloin f on muotoa $B\times\mathbb{R}^n \to B\times\mathbb{R}^{n+k}$.
Tällöin $\bar{g}(b) = q(pr_2 f(b,e_1), \dots, pr_2 f(b,e_n))$, ($q$ = span, kuten aiemmin)
joten $\bar{g}$:n jatkuvuus seuraa f:n jatkuvuudesta.
Myös $g = (\bar{g}, pr_2\circ f)$ on jatkuva.

$\square$

Määr. 5.11. Vektorikimppu $\xi^n \downarrow B$ on äärellistyyppinen, jos on olemassa $k\geq 0$ ja kimppukuvaus kanoniseen kimppuun $\xi^n \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Lause 5.12. Ol. $\xi\downarrow B$ kimppu. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
(1) ξ on äärellistyyppinen
(2) B:llä on äärellinen avoin peite (U_i) ja sille alistettu ykkösen ositus (λ_i) s.e. $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i$
(3) on olemassa vektorikimppu $\eta\downarrow B$ s.e. $\xi\oplus\eta \cong \varepsilon_B^{n+k}$.

Tod. $(1)\Rightarrow(2)$ Olkoon $(f,\bar{f}): \xi\to\gamma^n$ kimppukuvaus.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\gamma^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{array}$$

Olkoon $(U_i')_{i=1}^m$ $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$:n avoin peite ja $(\lambda_i')_{i=1}^m$ sille alistettu ykkösen ositus kuten esimerkissä 5.9.
Merkitään
$$U_i = \bar{f}^{-1}(U_i') \quad \text{ja} \quad \lambda_i = \lambda_i'\circ\bar{f}.$$
Tällöin $(U_i)_{i=1}^m$ on B:n avoin peite ja (λ_i) sille alistettu ykkösen ositus.
Lisäksi $\gamma^n|U_i'$ on triviaali, joten $\xi|U_i = \bar{f}^*(\gamma^n|U_i')$ on triviaali $\forall i$.

$(2)\Rightarrow(1)$ Olkoon $(U_i)_{i=1}^m$ B:n avoin peite, (λ_i) sille alistettu ykkösen ositus ja $\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{R}^n$, $e\mapsto(\pi(e), f_i(e))$, isomorfismi $\forall i=1,\dots,m$.
Lemman 5.10 nojalla riittää konstruoida monomorfismi $h:\xi\to\varepsilon_B^{n+k}$ jollain k.
Funktiot $h_i: E\to\mathbb{R}^n$,
$$h_i(e) = \begin{cases} \underbrace{\lambda_i(\pi(e))}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{f_i(e)}_{\in\mathbb{R}^n}, & \text{jos } e\in\pi^{-1}(U_i) \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$
ovat jatkuvia, koska $\operatorname{supp}(\lambda_i)\subset U_i$.
Määritellään $h: E\to B\times\mathbb{R}^{nm}$
$$h(e) = (\pi(e), h_1(e), \dots, h_m(e)).$$
h on lineaarinen säikeillä ja monomorfismi:
$\forall e\in E\ \exists i$ s.e. $\lambda_i(\pi(e))>0$. Tällöin $\pi(e)\in U_i$.
Jos $e\neq 0$, niin $f_i(e)\neq 0$, joten myös $h_i(e)\neq 0$.

(1) ⇒ (3) Koska ξ on äärellistyyppinen, on Lemman 4.4 nojalla
$$\xi \cong \bar{f}^* \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}).$$
Olkoon $\eta = \bar{f}^*\delta$, missä $\delta = (\gamma^n)^\perp$ (kts. HT). Tällöin
$$\xi \oplus \eta = \bar{f}^*\gamma^n \oplus \bar{f}^*\delta \cong \bar{f}^*(\gamma^n \oplus \delta) \cong \bar{f}^*(\varepsilon^{n+k}_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})}) = \varepsilon^{n+k}_B.$$

(3) ⇒ (1) Jos $\xi \oplus \eta \cong \varepsilon^{n+k}_B$, on olemassa monomorfismi $\xi \to \varepsilon^{n+k}_B$ ja siis ξ on äärellistyyppinen Lemman 5.10 nojalla. □

Seuraus 5.13. Jos vektorikimpun $\xi \downarrow B$ kanta-avaruus B on kompakti Hausdorff-avaruus, niin ξ on äärellistyyppinen.

Tod. HT

□

Huom. 5.14. Voidaan todistaa, että kaikki vektorikimput $\xi \downarrow B$ ovat äärellistyyppisiä, kun B on parakompakti avaruus, jonka peitedimensio on äärellinen. Tämä kattaa mm. kaikki monistot ja euklidisen avaruuden aliavaruudet $B \subset \mathbb{R}^n$.
Äärettömänulotteisia kanta-avaruuksia varten pitää Grassmannin monistossa $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ antaa $k \to \infty$.

Äärettömät Grassmannin monistot

Määr. 5.15. $\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_i \neq 0$ vain äärellisen monella indeksillä $i \in \mathbb{N}\}$.

Jos samastetaan
$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^\infty,$$
niin
$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n.$$
Annetaan avaruudelle $\mathbb{R}^\infty$ rajatopologia:
$$U \subset \mathbb{R}^\infty \text{ on avoin } \iff U \cap \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ on avoin } \forall n \geq 0,$$
t.s., funktio $f : \mathbb{R}^\infty \to X$ on jatkuva $\iff$ $f|_{\mathbb{R}^n}$ on jatkuva $\forall n$.

Koska n-taso $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on myös n-taso $\mathbb{R}^{n+k+1}$:ssä, saadaan
$$G_n(\mathbb{R}^n) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \ldots$$

Määr. 5.16. Ääretön Grassmannin monisto

$$G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

rajatopologialla varustettuna, t.s.

$$U \subset G_n \text{ avoin} \iff U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \text{ avoin } \forall k \geq 0.$$

G_n on siis vektoriavaruuden $\mathbb{R}^\infty$ n-tasojen joukko sopivasti topologisoituna.
Esim. G_1 on ääretön reaalinen projektiivinen avaruus $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}P^n$.

Määr. 5.17. Universaalin n-kimpun $\gamma^n \downarrow G_n$ kokonaisavaruus

$$E(\gamma^n) = \{ (X, v) \mid X \subset \mathbb{R}^\infty \text{ } n\text{-taso}, v \in X \} \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$$

varustettuna rajatopologialla $E(\gamma^n) = \bigcup_{k\geq 0} E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}))$,
projektio $\pi(X, v) = X$ ja säie $X \subset \mathbb{R}^\infty$ on vektorialiavaruus.

Huom. 5.18. Kokonaisavaruuteen $E(\gamma^n)$ saadaan periaatteessa kaksi topologiaa, rajatopologia sekä aliavaruustopologia tuloavaruudesta $G_n \times \mathbb{R}^\infty$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että nämä topologiat ovat samat (HT).
Rajatopologian määritelmän nojalla $\pi : E(\gamma^n) \to G_n$ on jatkuva.

Lemma 5.19. Kimppu $\gamma^n = (E(\gamma^n), \pi, G_n)$ on lokaalisti triviaali.
Tarkemmin, G_n:llä on numeroituva avoin peite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s.e. $\gamma^n|U_i$ on triviaali $\forall i \in \mathbb{N}$.

Tod. Ol. $X \in G_n$. Valitaan X:lle kanta $(x_1, \dots, x_n)$ ja pidetään sitä $(n\times\infty)$-matriisina $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Tällöin jotkin n saraketta ovat lineaarisesti riippumattomat ja koordinaatteja permutoimalla voidaan olettaa, että ne ovat n ensimmäistä, jolloin X kuuluu joukkoon $U = qV \subset G_n(\mathbb{R}^\infty)$, missä

$$V = \{ (P\ Q) \mid P \in Gl(n, \mathbb{R}) \} \subset V_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_n(\mathbb{R}^{n+k}).$$

U on avoin, koska $U_k := U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ (Lause 5.3 (3))
Kuten aiemmin, $\exists$ homeomorfismi

$$f : U \longrightarrow M_{n,\infty}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\infty$$
$$(P\ Q) \longmapsto P^{-1}Q.$$

Määritellään $h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U \subset E(\gamma^n)$
kuten Lemman 5.6 todistuksessa:
$$h(\bar{X}, (x_1, \dots, x_n)) = (\bar{X}, (x_1 \dots x_n)(I_n\ Q)),$$
missä $\bar{X} = q(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ ja $Q = f(\bar{X}) = \bar{X}_1^{-1}\bar{X}_2$.
Tällöin h:n rajoittuma joukkoon U_k on homeomorfismi
$$h_k : U_k \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} \pi^{-1}(U_k) \subset E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})).$$
Näiden rajana myös h on homeomorfismi, koska avaruuksilla
$U \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty}(U_k \times \mathbb{R}^n)$ ja $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty}\pi^{-1}(U_k)$
on rajatopologia (HT).
Jokaista jonoa $(i_1, \dots, i_n)$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n$ vastaa avoin
joukko $\mathcal{U}_{i_1 \dots i_n} = \{ q(\bar{X}) \in G_n \mid \bar{X}\text{:n sarakkeet } i_1, \dots, i_n \text{ ovat lin. riippumattomia} \}$,
jonka päällä γ^n on triviaali. Tällaisia jonoja on numeroituva määrä,
joten numeroimalla ne, saadaan haluttu peite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. □

Parakompaktisuus

Yleistetään Lause 5.12 tilanteeseen, jossa kimppu ei ole äärellistyyppinen, vaan kanta-avaruudella on sopiva numeroituva peite, jonka joukkojen päällä kimppu on triviaali.

Määr. 5.20. Topologinen avaruus B on parakompakti, jos B on Hausdorffin avaruus ja jokaista B:n avointa peitettä $(U_i)_{i \in I}$ kohden on olemassa avoin peite $(V_j)_{j \in J}$ s.e.

1) $(V_j)_{j \in J}$ on peitteen $(U_i)_{i \in I}$ tihennys: $\forall j\ \exists i$ s.e. $V_j \subset U_i$
2) $(V_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen: $\forall b \in B\ \exists$ avoin ympäristö U s.e. $U \cap V_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $j \in J$.

Huom. 5.21. a) Selvästi jokainen kompakti Hausdorff-avaruus on parakompakti.

b) Jokainen metrinen avaruus on parakompakti (A.H. Stonen lause, kts. esim. [Dugundji: Topology, Th. IX.5.3]. Erityisesti jokainen aliavaruus $B \subset \mathbb{R}^n$ ja siten jokainen topologinen monisto on parakompakti.

Palautetaan mieleen, että avaruus X on Lindelöf-avaruus, jos X:n jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite, [Väisälä, 12.13]
Esim. N_2-avaruudet, kuten $\mathbb{R}^n$ ja sen aliavaruudet ovat Lindelöf-avaruuksia (Ernst Lindelöf 1903, [Väisälä, Lause 12.14]).

Lause 5.22. Säännöllinen Lindelöf-avaruus on parakompakti.

Tod. Olkoon $(U_i)_{i\in I}$ säännöllisen Lindelöf-avaruuden X avoin peite.
Koska X on säännöllinen, jokaista $x \in X$ kohti löytyy avoimet joukot U_x ja V_x s.e.

$$x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset V_x$$

ja V_x on jokin joukoista U_i, $i \in I$.
Lindelöf-ominaisuuden nojalla peitteellä $(U_x)_{x\in X}$ on numeroituva osapeite $(U_{x_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Joukot

$$W_i = V_{x_i} \setminus (\overline{U}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{U}_{x_{i-1}})$$

muodostavat X:n avoimen peitteen, koska $x \in W_{i(x)}$, missä $i(x) = \min\{i \mid x \in V_{x_i}\}$.
Peite (W_i) on selvästi peitteen (U_i) tihennys ja lisäksi lokaalisti äärellinen, koska $U_{x_j} \cap W_i = \emptyset$, kun $i > j$.

$\square$

Seuraus 5.23. Ääretön Grassmannin monisto G_n on parakompakti.

Tod. $G_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on numeroituva yhdiste kompakteista joukoista. Jos $\mathcal{U}$ on G_n:n avoin peite, valitaan kullekin joukolle $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ äärellinen osapeite $\mathcal{U}_k$, jolloin $\mathcal{V} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_k$ on G_n:n numeroituva peite. Siis G_n on Lindelöf-avaruus.
Os. sitten, että G_n on säännöllinen. Koska G_n on selvästi T_1-avaruus (pisteet ovat suljettuja), riittää osoittaa, että jos $A \subset G_n$, $B \subset G_n$ ovat erillisiä ja suljettuja, on olemassa jatkuva $f: G_n \to [0,1]$ s.e. $f|A \equiv 0$ ja $f|B \equiv 1$ (jolloin G_n on itse asiassa normaali).
Konstruoidaan induktiolla jatkuvat $f_k : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to [0,1]$ s.e.

1) $f_k | A \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \equiv 0$, $f_k | B \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \equiv 1$
2) $f_{k+1} | G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = f_k$.

Aloitus f_0 on selvä, koska $G_n(\mathbb{R}^n)$ on piste. Jos ehdon 1) toteuttava funktio f_k on konstruoitu, on $G_n(\mathbb{R}^{n+k+1})$:n osajoukko $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \cup ((A\cup B)\cap G_n(\mathbb{R}^{n+k+1}))$ suljettu. Jatketaan f_k sille funktioksi g_{k+1} s.e.

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ 0, & x \in A \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Tällöin g_{k+1} on hyvin määritelty ja jatkuva.

Koska $G_n(\mathbb{R}^{n+k+1})$ on kompaktina avaruutena normaali, voidaan g_{k+1} jatkaa jatkuvaksi $f_{k+1}: G_n(\mathbb{R}^{n+k+1}) \to [0,1]$ Tietzen jatkolauseen nojalla [Väisälä: Lause 20.3].
Lopuksi funktiot f_k määrittelevät funktion $f: G_n \to [0,1]$, joka on jatkuva rajatopologian määritelmän nojalla.

$\square$

Lause 5.24. Olkoon $(U_i)_{i\in I}$ normaalin avaruuden B lokaalisti äärellinen avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen avoin peite $(V_i)_{i\in I}$, että $\overline{V_i} \subset U_i$ $\forall i \in I$.

Tod. Hyvinjärjestetään indeksijoukko I ja konstruoidaan transfiniittisellä induktiolla avointen joukkojen perhe (V_i) s.e.

(i) $\overline{V_i} \subset U_i$ $\forall i \in I$

(ii) Jos $i \in I$, niin $\{V_j \mid j \leq i\} \cup \{U_j \mid j > i\}$ on B:n avoin peite.

Olkoon joukot V_i, $i < \alpha$, konstruoitu s.e. (i) ja (ii) pätevät $\forall i < \alpha$.
Määritellään joukko V_α, jolle (i) ja (ii) ovat voimassa myös arvolla $i = \alpha$.

V. $\{V_i \mid i < \alpha\} \cup \{U_i \mid i \geq \alpha\}$ on B:n avoin peite.

T. Jos $b \in B$, niin joukko $\{i \in I \mid b \in U_i\}$ on äärellinen. Järjestetään se $i_1 < \dots < i_n$. Olkoon $i_h = \max\{i_k \mid i_k < \alpha\}$.
Jos $h < n$, niin $b \in U_{i_n}$ ja $i_n \geq \alpha$. Jos taas $h = n$, on siis $i_k < \alpha$ $\forall k = 1, \dots, n$ ja soveltamalla ehtoa (ii) arvolla $i = i_n$ saadaan $b \in V_j$ jollain $j \leq i_n < \alpha$. $\square$

Joukko $U = \bigcup_{i<\alpha} V_i \cup \bigcup_{i>\alpha} U_i$ on avoin ja y.o. väitteen mukaan $B \setminus U_\alpha \subset U$.
Koska B on normaali, $\exists$ avoin V s.e. $B \setminus U_\alpha \subset V \subset \overline{V} \subset U$ (tarkastellaan normaalisuuden määritelmässä erillisiä suljettuja joukkoja $B \setminus U_\alpha$ ja $B \setminus U$).
Joukko $V_\alpha = B \setminus \overline{V}$ toteuttaa $\overline{V_\alpha} \subset B \setminus V \subset U_\alpha$ ja $V_\alpha \cup U = B$, joten $\{V_i \mid i \leq \alpha\} \cup \{U_i \mid i > \alpha\}$ on B:n avoin peite.

$\square$

28.11.11 →

Lause 5.25. Olkoon $(U_i)_{i\in I}$ normaalin avaruuden B lokaalisti äärellinen avoin peite. Tällöin on olemassa peitteelle $(U_i)_{i\in I}$ alistettu ykkösen ositus.

Tod. HT

$\square$

Lause 5.26. Parakompakti avaruus B on normaali.

Tod. Määritelmän nojalla B on Hausdorffin avaruus.

Osoitetaan seuraava väite:

V. Olkoot A_1, A_2 B:n erillisiä suljettuja joukkoja. Jos $\forall x \in A_1$ $\exists$ avoimet $V_x \ni x$ ja $W_x \supset A_2$ s.e. $V_x \cap W_x = \emptyset$, niin $\exists$ avoimet $V \supset A_1$ ja $W \supset A_2$ s.e. $V \cap W = \emptyset$.

Koska B on Hausdorffin avaruus, seuraa tästä (tapaus A_2 = piste), että B on säännöllinen. Koska B siis on säännöllinen, seuraa tästä (tapaus A_1, A_2 suljettuja), että B on normaali.

T. Valitaan B:n avoimelle peitteelle $\{B \setminus A_1\} \cup \{V_x \mid x \in A_1\}$ lokaalisti äärellinen tihennys $(V_i)_{i \in I}$. Jos $A_1 \cap V_i \neq \emptyset$, niin $\exists x_i \in A_1$ s.e. $V_i \subset V_{x_i}$ (tihennys). Määritellään

$$V = \bigcup \{ V_i \mid A_1 \cap V_i \neq \emptyset \}.$$

Tällöin V on avoin ja $V \supset A_1$.

Jos $y \in A_2$, $\exists$ avoin $S_y \ni y$ s.e. $S_y \cap V_i \neq \emptyset$ vain äärellisen monella i. (lokaali äärellisyys); merk.

$$J = \{ i \in I \mid S_y \cap V_i \neq \emptyset,\ A_1 \cap V_i \neq \emptyset \} \subset I.$$

Nyt J on äärellinen ja $U_y = S_y \cap \bigcap_{i \in J} W_{x_i}$ on y:n avoin ympäristö.

Lisäksi $U_y \cap V = \emptyset$: jos $A_1 \cap V_i \neq \emptyset$, niin

joko $S_y \cap V_i = \emptyset$, jolloin $U_y \cap V_i = \emptyset$

tai $S_y \cap V_i \neq \emptyset$, jolloin $i \in J$ ja $U_y \subset W_{x_i}$. Koska $V_i \subset V_{x_i}$ ja $V_{x_i} \cap W_{x_i} = \emptyset$, on myös $U_y \cap V_i = \emptyset$.

Määrittelemällä $W = \bigcup_{y \in A_2} U_y$ on löydetty halutut joukot V ja W. $\square$

Yhdistelemällä aiempia tuloksia saamme päätuloksen

Lause 5.27. Parakompaktin avaruuden B jokaiseen avoimeen peitteeseen $(U_i)_{i \in I}$ liittyy sille alistettu ykkösen ositus $(\lambda_i)_{i \in I}$.

Tod. HT

$\square$

Lause 5.28 Universaalin kimpun $\gamma^n \downarrow G_n$ kanta-avaruudella G_n on numeroituva avoin peite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja sille alistettu ykkösen ositus $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s.e. $\gamma^n|U_i$ on triviaali $\forall i\in\mathbb{N}$.

Tod. Peite (U_i) löytyy Lemman 5.19 nojalla. Grassmannin monisto on parakompakti Seurauksen 5.23 nojalla, joten ykkösen ositus saadaan Lauseesta 5.27.

$\square$

Numeroituvatyyppiset kimput

Määr. 5.29 Vektorikimppu $\xi^n \downarrow B$ on *numeroituvaa tyyppiä*, jos on olemassa kimppukuvaus kanoniseen kimppuun $\xi^n \to \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$.

Lause 5.30 Ol. $\xi\downarrow B$ $\mathbb{R}^n$-kimppu. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(1) ξ on numeroituvaa tyyppiä

(2) B:llä on numeroituva avoin peite (U_i) ja sille alistettu ykkösen ositus (λ_i) s.e. $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i$.

(3) B:llä on avoin peite (U_i) ja sille alistettu ykkösen ositus (λ_i) s.e. $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i$.

Seuraus 5.31 Jos vektorikimpun $\xi\downarrow B$ kanta-avaruus on parakompakti, niin ξ on numeroituvaa tyyppiä.

Tod. Ehdon (3) ykkösen ositus on automaattisesti olemassa.

$\square$

Lauseen 5.30 todistus

(1) $\Rightarrow$ (2) Jos ξ on numeroituvaa tyyppiä, on se indusoitu kimppu $\xi \cong f^*\gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ ja väite seuraa Lauseesta 5.28 vastaavalla päättelyllä kuin Lauseen 5.12 todistuksessa (1)$\Rightarrow$(2), $U_i = \bar{f}^{-1}(U_i')$, $\lambda_i = \lambda_i'\circ f$, ...

(2) $\Rightarrow$ (3) selvä.

(3) $\Rightarrow$ (2) Jaetaan todistus kahdeksi lemmaksi:

Lemma 5.32 Ol. $\xi \downarrow B$ $\mathbb{R}^n$-kimppu, $(U_i)_{i\in I}$ B:n avoin peite ja $(\lambda_i)_{i\in I}$ sille alistettu ykkösen ositus s.e. $\xi|U_i$ on triviaali $\forall i$. Tällöin on olemassa lok. äärellinen avoin peite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja jatkuvat $v_k : B \to [0,1]$ s.e. $V_k = v_k^{-1}(0,1]$, $\sum v_k = 1$ ja $\xi|V_k$ on triviaali $\forall k$.

Tod. Ol. $S \subset I$ äärellinen, epätyhjä joukko. Merkitään
$$V(S) = \{ b\in B \mid \min_{i\in S} \lambda_i(b) > \max_{j\notin S} \lambda_j(b) \}.$$
Koska jokaisella pisteellä $b\in B$ on ympäristö jossa $\lambda_i = 0$ lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä i, on $V(S)$ avoin tässä ympäristössä ($V(S)$ on lokaalisti avoin). Siis $V(S)$ on avoin.
Samasta syystä funktio $v_S : B \to [0,1]$
$$v_S = \max\left[0, \min_{i\in S, j\notin S} (\lambda_i(b) - \lambda_j(b))\right]$$
on jatkuva ja
$$V(S) = v_S^{-1}(0,1].$$
Merk. $|S|$ = S:n alkioiden lukumäärä ja
$$V_k = \bigcup \{ V(S) \mid |S| = k \}, \quad v_k' = \sum_{|S|=k} v_S .$$
Tällöin

1) $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on B:n avoin peite: $b\in V(S(b))$, missä $S(b) = \{ i\in I \mid \lambda_i(b) > 0 \}$.
2) $\xi|V(S)$ on triviaali $\forall S$: jos $b\in V(S)$ ja $i\in S$, niin $\lambda_i(b) > 0$, siis $V(S) \subset U_i$.
   Yhdiste $V_k = \bigcup \{ V(S) \mid |S| = k \}$ on erillinen:
   jos $S \neq S'$ ja $|S| = |S'| = k$, niin valitaan $i\in S\setminus S'$ ja $j\in S'\setminus S$, jolloin epäyhtälöt
   $$b\in V(S) \Rightarrow \lambda_i(b) > \lambda_j(b) \quad \text{ja} \quad b\in V(S') \Rightarrow \lambda_j(b) > \lambda_i(b)$$
   eivät voi toteutua samanaikaisesti.
   Siten myös $\xi|V_k$ on triviaali $\forall k\in\mathbb{N}$;
   funktiot v_k' ovat jatkuvia ja $V_k = (v_k')^{-1}(0,1]$.
3) $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on lokaalisti äärellinen: jos $b\in B$, niin valitaan $W_b \ni b$ s.e. $S = \{ i\in I \mid W_b \cap \operatorname{supp}(\lambda_i) \neq \emptyset \}$ on äärellinen.
   Tällöin $W_b \cap V(S') \neq \emptyset$ vain jos $S' \subset S$:
   jos $i\in S'\setminus S$, niin $W_b \cap \operatorname{supp}(\lambda_i) = \emptyset$, jolloin $\lambda_i(x) = 0 \; \forall x\in W_b$
   ja $\min_{i\in S'} \lambda_i(x) = 0$ eli $x\notin V(S')$.
   Siis W_b voi leikata vain äärellisen montaa joukoista V_k.

Lopuksi summa $\sum_{k=0}^{\infty} v_k'$ on jatkuva ja voidaan määr. $v_k = \dfrac{v_k'}{\sum_{n=0}^{\infty} v_n'}$.

$\square$ 5.32

Lemma 5.33 Edellisen lemman tilanteessa on olemassa peitteelle $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alistettu ykkösen ositus $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Tod. Valitaan jatkuvat apufunktiot $\vartheta_k : [0,1] \to [0,1]$ s.e. $\vartheta_k(t) = 0$, kun $t \le \frac{1}{2^{k+1}}$ ja $\vartheta_k(t) > 0$, kun $t > \frac{1}{2^{k+1}}$.

Asetetaan

$$\lambda_k' = \vartheta_k \circ V_k : B \to [0,1].$$

Tällöin $\operatorname{supp} \lambda_k' \subset V_k^{-1}\left[\frac{1}{2^{k+1}}, 1\right] \subset V_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k' > 0$, sillä

jos $\lambda_k'(b) = 0 \ \forall k$ niin $V_k(b) \le \frac{1}{2^{k+1}} \ \forall k$
ja $\sum_{k=1}^{\infty} V_k(b) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$ ristiriita, koska $\sum V_k = 1$.

Normeerauksella $\lambda_k = \dfrac{\lambda_k'}{\sum \lambda_k'}$ saadaan haluttu ykkösen ositus $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$\square$ 5.33.

Lemmat 5.32 ja 5.33 osoittavat implikaation "(3) $\Rightarrow$ (2)".

(2) $\Rightarrow$ (1) Olkoon $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ B:n avoin peite, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sille alistettu ykkösen ositus ja $\pi^{-1}(U_k) \xrightarrow{\cong} U_k \times \mathbb{R}^n$ trivialisaatiot $e \mapsto (\pi(e), f_k(e))$.

Funktiot $h_k : E \to \mathbb{R}^n$

$$h_k(e) = \begin{cases} \overbrace{\lambda_k(\pi(e))}^{\in\mathbb{R}} \overbrace{f_k(e)}^{\in\mathbb{R}^n}, & e \in \pi^{-1}(U_k) \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ovat jatkuvia, koska $\operatorname{supp}(\lambda_k) \subset U_k$. Koska $(\operatorname{supp}\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on lokaalisti äärellinen, on $h_k(e) \neq 0$ vain äärellisen monella k ja voidaan määritellä $f : E \to \mathbb{R}^\infty$ kaavalla

$$f(e) = (h_1(e), h_2(e), \dots) \in (\mathbb{R}^n)^\infty = \mathbb{R}^\infty.$$

f on säikeillä $\pi^{-1}(b)$ lineaarinen injektio, joten voidaan asettaa $\bar{f} : B \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $\bar{f}(b) = \underbrace{f(\pi^{-1}(b))}_{n\text{-taso } \mathbb{R}^\infty\text{:issä}}$.

Joka pisteellä $b \in B$ on ympäristö $U(b) \subset B$, jossa $h_k \equiv 0 \ \forall k \ge k_0$ ja jossa $(f, \bar{f})$ voidaan tulkita kimppukuvaukseksi

$$\xi|_{U(b)} \to \gamma^n(\mathbb{R}^{nk_0}).$$

Siis $(f, \bar{f})$ määrittelee globaalin kimppukuvauksen $\xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$.

$\square$ (5.30)

Riemannin metriikat

Avaruuden $\mathbb{R}^\infty$ sisätuloon
$$(x_1, x_2, \ldots)\cdot(y_1, y_2, \ldots) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots$$
liittyy neliömuoto $\mu_0 : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$
$$\mu_0(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 .$$
(Huom. summat äärellisiä!)

μ_0 on jatkuva, koska $\mu_0|\mathbb{R}^n$ on tavallisen normin neliönä jatkuva $\forall n$.
Tästä saadaan universaalikimpulle $\gamma^n \downarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ Riemannin metriikka
$$\mu : E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{\mu_0} \mathbb{R},$$
μ on jatkuva ja säikeillä $F_X = X$ se liittyy kanonisen sisätulon rajoittumaan $X \times X \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, joka myös on sisätulo.

Lause 5.34. Jokaisella numeroituvatyyppisellä vektorikimpulla on Riemannin metriikka.

Tod. Jos $\xi \downarrow B$ on numeroituvaa tyyppiä, on olemassa kimppukuvaus $f : \xi \to \gamma^n$. Yhdistetty kuvaus
$$E(\xi) \xrightarrow{f} E(\gamma^n) \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$$
on Riemannin metriikka ξ:llä, koska f on säikeillä lin. isomorfismi, joten $F_b \times F_b \xrightarrow{f \times f} X \times X \to \mathbb{R}$ on sisätulo $\forall b \in B$. $\square$

Seuraus 5.35. Jokaisella vektorikimpulla parakompaktin avaruuden päällä on Riemannin metriikka.

Tod. 5.31 ja 5.34. $\square$

Kimppukuvausten yleiskäsitteisyys

Kimppukuvaukset $f, g : \xi \to \gamma$ ovat *kimppuhomotooppiset*, jos on olemassa perhe kimppukuvauksia $h_t : \xi \to \gamma$, $0 \le t \le 1$, s.e.
$$h_0 = f \text{ ja } h_1 = g$$
ja kuvaus $h : E(\xi) \times [0,1] \to E(\gamma)$
$$h(e, t) = h_t(e)$$
on jatkuva. Merk. $f \simeq g$.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f,g} & E(\gamma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar f, \bar g} & C \end{array}$$

Y.o. tilanteessa myös kuvaukset $\bar f$ ja $\bar g : B \to C$ ovat homotooppiset.

Lause 5.36. Ol. $\xi \downarrow B$ $\mathbb{R}^n$-kimppu. Kaikki kimppukuvaukset $\xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^\infty)$ ovat kimppuhomotooppisia.

Tod. Kimppukuvaus $f : \xi \to \gamma^n$ määrittelee jatkuvan kuvauksen

$$\hat{f} : E(\xi) \xrightarrow{f} E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^\infty,$$

jonka rajoittuma jokaiseen säikeeseen on lineaarinen injektio. Kääntäen, tällainen $\hat{f}$ määrittelee funktion

$$f : E(\xi) \to E(\gamma^n)$$

kaavalla

$$f(e) = (\underbrace{\hat{f}(F_{\pi(e)}(\xi))}_{n\text{-taso } \bar{X} \ \mathbb{R}^\infty\text{:ssä}}, \underbrace{\hat{f}(e)}_{\in \bar{X}}) \in E(\gamma^n).$$

f on jatkuva, koska $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$ on aliavaruus (Kts. Huom. 5.18).

Jos $f, g : \xi \to \gamma^n$ ovat kimppukuvauksia, vastaa niiden välinen kimppuhomotopia (h_t) homotopiaa $(\hat{h}_t) : \hat{f} \simeq \hat{g}$, jossa $\hat{h}_t : E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ on lineaarinen injektio säikeillä $\forall t$.

Tapaus 1. Origo ei kuulu janaan $[\hat{f}(e), \hat{g}(e)]$ millään $e \in E(\xi)$, $e \neq 0$. Tällöin $\hat{h}_t(e) = (1-t)\hat{f}(e) + t\hat{g}(e)$ on haluttu homotopia:

$\hat{h}_t$ on jatkuva (e,t):n funktio, koska yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat jatkuvia $\mathbb{R}^\infty$:ssä (HT).

Osoitetaan, että perhe $h_t(e) = (\hat{h}_t(F_{\pi(e)}), \hat{h}_t(e))$ on jatkuva (e,t):n funktio. Edellä nähdyn nojalla riittää osoittaa, että

$$\bar{h} : B \times [0,1] \to G_n$$
$$\bar{h}(b,t) = \hat{h}_t(F_b)$$

on jatkuva. Koska kysymys on lokaali, voidaan olettaa, että ξ on triviaali. Valitaan lineaarisesti riippumattomat sektiot $s_1, \dots, s_n : B \to E(\xi)$. Tällöin $\bar{h}$ on yhdistetty kuvaus

$$\bar{h}(b,t) = q(\hat{h}_t(s_1(b)), \dots, \hat{h}_t(s_n(b)))$$

1) jatkuvasta kuvauksesta $B \times [0,1] \to V_n(\mathbb{R}^\infty)$, $(b,t) \mapsto (\hat{h}_t(s_1(b)), \dots, \hat{h}_t(s_n(b)))$

2) projektiosta $q : V_n(\mathbb{R}^\infty) \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$,

missä $V_n(\mathbb{R}^\infty) \subset \underbrace{\mathbb{R}^\infty \times \dots \times \mathbb{R}^\infty}_{n \text{ kpl}}$ on ääretön Stiefelin monisto.

Koska q on jatkuva (HT), on myös $\bar{h}$ jatkuva. □ Tapaus 1.

Yleinen tapaus. Erotetaan $\mathbb{R}^\infty$:n koordinaatit kuvauksilla $d_1, d_2 : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$,

$d_1(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$, $d_2(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, \dots)$.

Ne indusoivat kimppukuvaukset $d_i : E(\gamma^n) \to E(\gamma^n)$, $(\bar{X}, v) \mapsto (d_i(\bar{X}), d_i(v))$.

Käyttämällä nyt tapausta 1 (3 kertaa) saadaan

$$f \simeq d_1 \circ f \simeq d_2 \circ g \simeq g \quad \text{(yksityiskohdat HT)}.$$

□