Vektorikimput voidaan siis kuvailla pelkkien siirtymäkuvausten g_{ij} avulla. Vastaavasti määritellään yleisempi käsite *säiekimppu*, jonka säie on F ja rakenneryhmä (structure group) G, korvaamalla $Gl(n,\mathbb{R})$ topologisella ryhmällä G ja $\mathbb{R}^n$ avaruudella F, jossa ryhmä G toimii. Tämä lähestymistapa vastaa Whitneyn alkuperäistä pallokimpun määritelmää (1935). Tapaus, jossa säie F on sama kuin ryhmä G, on nimeltään *pääsäiekimppu* (principal fibre bundle). Kts. [Steenrod: The Topology of Fibre Bundles, § 2-3].

4. Operaatioita kimpuilla

Määr. 4.1. Ol. $\xi = (E, \pi, B)$ vektorikimppu ja $B_1 \subset B$. Tällöin $\xi|B_1 = (E_1, \pi_1, B_1)$, missä $E_1 = \pi^{-1}(B_1)$, $\pi_1 = \pi|E_1$, on myös vektorikimppu, ξ:n *rajoittuma* joukkoon B_1, kun säikeille $F(\xi|B_1)_b = F(\xi)_b$ annetaan alkuperäinen vektoriavaruusrakenne. $\xi|B_1$ nähdään lokaalisti triviaaliksi rajoittamalla kartat.

Esim. 4.2. a) Triviaalin kimpun $B \times \mathbb{R}^n$ rajoittuma on triviaali.

b) Jos M on sileä monisto ja $U \overset{\circ}{\subset} M$, niin $\tau_U = \tau_M|U$.

c) $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ kuvauksella $[x] \mapsto [(x,0)]$, $x \in S^n$.
Tällöin kanoninen suorakimppu $\gamma_n^1 = \gamma_{n+1}^1 | \mathbb{R}P^n$.

Rajoittuma on erikoistapaus yleisemmästä tilanteesta:
Ol. $\xi = (E, \pi, B)$ vektorikimppu ja $f: B_1 \to B$ jatkuva kuvaus.

Määr. 4.3. *Indusoitu kimppu* $f^*\xi$ on vektorikimppu, jonka kanta-avaruus on B_1, kokonaisavaruus

$$E_1 = \{(b,e) \mid f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E$$

ja projektio $\pi_1(b,e) = b$.

HT { Kuvaus $\hat{f}: E_1 \to E$, $(b,e) \mapsto e$, määrittelee homeomorfismin $\pi_1^{-1}(b) \cong \pi^{-1}(f(b))$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Säikeille $F_b(f^*\xi)$ annetaan vektoriavaruusrakenne bijektion $\hat{f}$ välityksellä.

Osoitetaan vielä, että $f^*\xi$ on lokaalisti triviaali:
Jos (U,h) on ξ:n kartta, niin $U_1 = f^{-1}U$ on avoin ja kuvaus
$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$$
$$h_1(b,x) = (b, h(f(b),x))$$
antaa isomorfismin $\{b\}\times\mathbb{R}^n \to \{b\}\times F_{f(b)} = F_b(f^*\xi)$ joka säikeellä ja $h_1^{-1}(b,e) = (b, pr_2(h^{-1}e))$ on jatkuva.
Siis (U_1,h_1) on $f^*\xi$:n kartta. Yksityiskohdat: HT.

$\square$

Erityisesti triviaalin kimpun indusoima kimppu on triviaali.
Jos $i : B_1 \hookrightarrow B$ on inkluusio, niin $\xi|B_1$ ja $i^*\xi$ ovat isomorfiset (HT).

7.11.11 →

Yleisesti, jos ξ ja η ovat vektorikimppuja avaruuksilla B ja C, niin <u>kimppukuvaus</u> $\xi \to \eta$ on pari jatkuvia kuvauksia (g,f), joille oheinen kaavio kommutoi ja joilla syntyvät kuvaukset $F_b(\xi)\to F_{f(b)}(\eta)$ ovat lin. isomorfismeja.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

<u>Lemma 4.4.</u> Jos $(g,f) : \xi \to \eta$ on kimppukuvaus, niin $\xi \cong f^*\eta$.

<u>Tod.</u> Haluttu isomorfismi $h : E(\xi) \to E(f^*\eta)$ saadaan kaavasta $h(e) = (\pi(e), g(e))$:
h on jatkuva ja isomorfismi säikeillä $F_b(\xi) \to F_b(f^*\eta)$, siis kimppuisomorfismi (Lemma 3.8).

$\square$

<u>Huom.</u> Selvästi kokonaisavaruuksien välinen $g : E(\xi)\to E(\eta)$ määrää f:n ja f on jatkuva jos g on jatkuva (koska projektio π on avoin kuvaus). Siis jatkuva $g : E(\xi) \to E(\eta)$ riittää määrittelemään kimppukuvauksen, kunhan se kuvaa säikeet säikeille isomorfisesti.

Voitaisiin myös tarkastella säikeillä lineaarisia kuvauksia $g : E(\xi) \to E(\eta)$, mutta näillä on se haittapuoli, etteivät (säikeittäin otetut) ydin ja kuva yleensä ole vektorikimppuja.

Alikimput ja monomorfismit

Määr. 4.5. Ol. ξ ja η kimppuja samalla avaruudella B. ξ on η:n *alikimppu*, jos $E(\xi) \subset E(\eta)$ ja jokainen säie $F_b(\xi) \subset F_b(\eta)$ on aliavaruus.

Jos ξ ja η ovat kimppuja avaruudella B, niin jatkuva $g : E(\xi) \to E(\eta)$ on *monomorfismi*, jos se indusoi säikeillä lineaarisen injektion $F_b(\xi) \to F_b(\eta)$ $\forall b \in B$. Merkitään $Im(g)$ on kolmikko $(g(E(\xi)), \pi|g(E(\xi)), B)$.

Lause 4.6. Jos $g : \xi \to \eta$ on monomorfismi, niin $Im\, g$ on η:n alikimppu.

Tod. Jokainen säie $g(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ on selvästi aliavaruus, joten jää todistettavaksi lokaali triviaalisuus.

Rajoittumalla pisteen $b_0 \in B$ ympärillä avoimeen joukkoon, jossa sekä ξ että η ovat triviaaleja, voidaan olettaa, että g on muotoa

$$B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow B \times \mathbb{R}^{n+k}$$

$$g(b,x) = (b, g_b(x)).$$

Saadaan jatkuva kuvaus

$$g : B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k}) = \{n \times (n+k)\text{-matriisit}\}$$

$$b \longmapsto g_b \,.$$

Pisteessä $b_0 \in B$ on $g_{b_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ injektio. Valitaan komplementti-aliavaruus $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ s.e. $\mathbb{R}^{n+k} = Im(g_{b_0}) \oplus V$, ja määritellään

$$h_b : \mathbb{R}^n \oplus V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

$$h_b(x,v) = g_b(x) + v \,.$$

Tällöin h_{b_0} on surjektio, siis isomorfismi $(\dim(\mathbb{R}^n \oplus V) = n+k = \dim(\mathbb{R}^{n+k}))$.

Koska h_b on jatkuva b:n funktio ja $Gl(n+k, \mathbb{R}) \subset L(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k})$, on h_b kääntyvä $\forall b$ jossain b_0:n ympäristössä $U \subset B$, ja h_b^{-1} on jatkuva b:n funktiona.

Nyt $Im\, g$ on triviaali joukossa U, karttana

$$g| : U \times \mathbb{R}^n \to g(U \times \mathbb{R}^n) \subset B \times \mathbb{R}^{n+k}$$

$$(b,x) \longmapsto (b, g_b(x))\,;$$

käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa siitä, että

$$g_b^{-1} = pr \circ h_b^{-1} : g_b(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad (*)$$

missä $pr : \mathbb{R}^n \oplus V \to \mathbb{R}^n$, ja g_b^{-1} on jatkuva b:n funktiona, koska h_b^{-1} on.

$\square$

(*) Joukon $g_b(\mathbb{R}^n)$ alkio on muotoa $g_b(x) + \bar{0} \xmapsto{h_b^{-1}} (x, \bar{0})$

$$\downarrow$$

$$x$$

Whitneyn summa

Ol. ξ_1, ξ_2 kimppuja $\pi_i : E_i \to B_i$ $(i=1,2)$. Niiden **karteesinen tulo** $\xi_1 \times \xi_2$ on vektorikimppu, jonka projektio on
$$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2 ,$$
kun säikeille $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ annetaan rakenne $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$.
Lokaali triviaalisuus todetaan ottamalla karttakuvausten tulo.

Esim. jos $M = M_1 \times M_2$ on sileiden monistojen tulo, niin $\tau_M = \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$, vrt. Lause 2.13.

Tärkein erikoistapaus on

Määr. 4.7. Whitneyn summa
Ol. ξ_1, ξ_2 kimppuja avaruudella B ja $\Delta : B \to B \times B$ kuvaus $b \mapsto (b,b)$. Kimppujen ξ_1 ja ξ_2 **Whitneyn summa** on
$$\xi_1 \oplus \xi_2 := \Delta^*(\xi_1 \times \xi_2),$$
t.s. kimppu, jonka kokonaisavaruus on $(B\times) E_1(\xi_1) \times E_2(\xi_2)$:n osajoukko
$$\{(b, e_1, e_2) \mid \pi(e_1) = \pi(e_2) = b\} = \{(e_1, e_2) \mid \pi(e_1) = \pi(e_2)\}$$
9.11.11 ja säie $F(\xi_1 \oplus \xi_2)_b = F(\xi_1)_b \oplus F(\xi_2)_b$.

Tutkitaan seuraavaksi, milloin alikimpulla $\xi_1 \subset \eta$ on komplementti ξ_2 s.e. $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

Lemma 4.8. Jos ξ_1 ja ξ_2 ovat η:n alikimppuja ja $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ $\forall b \in B$, niin $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

Tod. Kuvaus $h : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \to E(\eta)$, $h(e_1, e_2) = e_1 + e_2$, on lin. isomorfismi joka säikeellä ja jatkuva, siis vektorikimppujen välinen isomorfismi (Lemma 3.8.). $\square$

Olkoon nyt η vektorikimppu, jossa on Riemannin metriikka ja $\xi \subset \eta$ sen alikimppu.

Määr. 4.9. **Ortogonaalinen komplementti** $\xi^\perp$ on vektorikimppu, jonka säikeet ovat
$$F_b(\xi^\perp) = \{v \in F_b(\eta) \mid v \cdot w = 0 \ \forall w \in F_b(\xi)\}$$
ja kokonaisavaruus $E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$.

Lause 4.10. $\xi^\perp$ on vektorikimppu ja $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.

Tod. Lokaali triviaalisuus todistetaan oleellisesti samalla tavoin kuin Seuraus 3.15.

Jälkimmäinen väite seuraa Lemmasta 4.8.

$\square$

Immersion normaalikimppu

Esim. 4.11. Jos $M \subset N \subset \mathbb{R}^m$ ovat sileitä monistoja, $TM \subset TN|_M$ alikimppu. Valitsemalla N:lle Riemannin metriikka (kts. 3.13) saadaan TM:n ortogonaalinen komplementti, normaalikimppu $\nu = \nu(M,N)$ ja 4.10 nojalla

$$(**) \qquad TN|_M \cong TM \oplus \nu.$$

Esim. $M = S^n$, $N = \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Rightarrow F(\nu)_x = (T_x S^n)^\perp = \mathbb{R}x, \quad x \in S^n,$$

joten normaalikimppu $\nu(S^n, \mathbb{R}^{n+1})$ on triviaali suorakimppu

$$\nu = \{(x, tx) \mid t \in \mathbb{R}\} \cong \{(x,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \varepsilon^1_{S^n}$$

ja $(**) \Rightarrow$

$$TS^n \oplus \varepsilon^1_{S^n} \cong \varepsilon^{n+1}_{S^n}.$$

Sanomme, että TS^n on stabiilisti triviaali, t.s. tulee triviaaliksi, kun siihen lisätään sopiva triviaali kimppu.

Yleisemmin, sileä $f: M \to N$ sileiden monistojen välillä on immersio, jos $Tf_x : TM_x \to TN_{f(x)}$ on injektio $\forall x \in M$.

Huom. Funktion f ei tarvitse olla injektio, mutta voidaan osoittaa, että f on lokaalisti injektio.

Differentiaalin $Tf : TM \to TN$ kuva ei välttämättä ole alikimppu.

Kuitenkin Tf indusoi kuvauksen $g : TM \to E(f^*TN)$,

$$(x,v) \mapsto (x, Tf_x v),$$

joka on lineaarinen injektio joka säikeellä. Siis $\mathrm{Im}\, g \subset f^*TN$ on alikimppu, joka voidaan samastaa TM:n kanssa. (4.6.).

Siis: jos $f: M \to N$ on immersio, niin

$$f^*TN \cong TM \oplus \nu_f,$$

missä ν_f on alikimpun TM ortogonaalinen komplementti (4.9 ja 4.10).

Esim. 4.12. TRP^n

Jos $x \in S^n$, niin differentiaali $Tp : TS^n \to TRP^n$ kuvaa tangenttivektorit (x,v) ja $(-x,-v)$ samalle vektorille $[x,v] \in T_{[x]}RP^n$ ($v = p'(0) \Rightarrow -v = (-p)'(0)$). RP^n:n tangenttiavaruus koostuu siis pareista $[x,v] = \{(x,v), (-x,-v)\}$:

$$TRP^n = \{ [x,v] \mid x \in S^n, v \in \mathbb{R}^{n+1}, x \cdot v = 0 \}.$$

Immersion $RP^n \xrightarrow{i} RP^{n+1}$, $[x] \mapsto [(x,0)]$ indusoiman kimpun $i^* TRP^{n+1}$ kokonaisavaruus koostuu pareista $[x,(v,t)]$; $[x,v] \in TRP^n$, $t \in \mathbb{R}$. Normaalikimppu ν_i saadaan siis pareista $[x,t] = \{(x,t),(-x,-t)\}$ eli se on isomorfinen kanonisen suorakimpun γ_n^1 kanssa (kts. Esim. 3.3 d)), kuvauksen $\gamma_n^1 \to \nu_i$, $([x], tx) \longmapsto [x,t]$ välityksellä. Saadaan

$$i^* TRP^{n+1} \cong TRP^n \oplus \gamma_n^1 .$$

5. Grassmannin monistot ja universaalikimput

Esim. 5.1. Ol. $M^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sileä käyrä (eli sileä 1-monisto). Vastaavuus

$$f : x \longmapsto \text{tangenttisuora } T_x M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \in M$$

on jatkuva kuvaus $f : M \to \mathbb{R}P^n$. (tangenttisuora siirretty kulkemaan origon kautta)

Samoin, jos $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on sileä hyperpinta (eli sileä kodimensiota 1 oleva alimonisto), niin vastaavuus

$$n : x \longmapsto \text{normaalisuora } L_x = (T_x M)^{\perp} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

määrittelee jatkuvan kuvauksen $n : M \to \mathbb{R}P^n$. (Nämä ideat ovat peräisin jo Gaussilta.)

Ensimmäisessä tapauksessa tangenttikimppu TM on kanonisen suorakimpun $\gamma_n^1 \downarrow \mathbb{R}P^n$ indusoima: $(x,v) \longmapsto (T_x M, v)$ on kimppukuvaus, joten Lemma 4.4. $\Rightarrow TM \cong f^* \gamma_n^1$. Toisessa tapauksessa normaalikimppu ν_M on samoin indusoitu kimppu: $\nu_M \cong n^* \gamma_n^1$.

Yleisesti, jos $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on sileä n-monisto, niin

$$x \longmapsto T_x M \subset \mathbb{R}^{n+k}, \quad x \in M$$

on kuvaus $M \longrightarrow \{n\text{-ulotteiset aliavaruudet } \mathbb{R}^{n+k}\text{:ssa}\}$.
Määrittelemme nyt tarkemmin tämän joukon.