Sileä funktio $f: M \to N$ määrittelee tangenttikimppujen välisen kuvauksen $Tf: TM \to TN$ kaavalla
$$Tf(x,v) = (f(x), Tf_x(v)).$$
Tf on siis pohjalla kuvaus f ja säikeillä $T_x M \to T_{f(x)} N$ lineaarinen differentiaali Tf_x.

__Lemma 2.17.__ Jos f on sileä kuvaus, niin Tf on sileä, $T(id) = id$ ja $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$. $\square$

__Seuraus 2.18.__ Jos f on diffeomorfismi $M \to N$, niin Tf on diffeomorfismi $TM \to TN$. $\square$

3. Vektorikimput (engl. vector bundle)

Sileän moniston tangenttikimppu sisältää jokaisen moniston pisteen "päällä" vektoriavaruuden. Yleisemmin, olkoon B topologinen avaruus, n.s. __kanta-avaruus__ (engl. base space).

__Määr. 3.1.__ n-ulotteinen __vektorikimppu__ ξ avaruudella B on kolmikko (E, π, B), missä

1) $E = E(\xi)$ on topologinen avaruus, n.s. kokonaisavaruus (engl. total space)
2) $\pi: E \to B$ on jatkuva surjektio, n.s. projektio
3) $\forall b \in B$ säie $F_b = \pi^{-1}(b)$ on varustettu reaalisen vektoriavaruuden struktuurilla

joka toteuttaa seuraavan __lokaalin triviaalinuusehdon__:

$\forall b \in B$ $\exists$ b:n avoin ympäristö $U \subset B$ ja homeomorfismi
$$h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U,$$
s.e. $\forall b \in U$ kuvaus $h_b: \{b\} \times \mathbb{R}^n \to F_b$ on vektoriavaruusisomorfismi.

Merkitään $\xi \downarrow B$.

Määritelmästä seuraa, että kaavio
$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}U \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
kommutoi.

Pari (U,h) on kartta b:n ympärillä. Jos voidaan valita $U=B$, sanotaan, että ξ on triviaali kimppu.
n-ulotteinen vektorikimppu = lyhyemmin $\mathbb{R}^n$-kimppu.

Sileä vektorikimppu määritellään samoin, vaatimalla että E ja B ovat sileitä monistoja, π sileä funktio ja että kartoissa (U,h) voidaan h valita diffeomorfismiksi.

Määr. 3.2. Vektorikimput ξ ja η B:n päällä ovat isomorfiset, jos $\exists$ homeomorfismi $f: E(\xi) \to E(\eta)$, joka kuvaa jokaisen vektoriavaruuden $F_b(\xi)$ isomorfisesti avaruudelle $F_b(\eta)$. Merkitään $\xi \cong \eta$.

Esim. 3.3. a) Triviaali kimppu: $E = B \times \mathbb{R}^n$, $\pi = pr_1$ ja vektoriavaruusrakenne

$$\lambda(b,x) + \mu(b,y) = (b, \lambda x + \mu y)$$

Merkitään $\varepsilon^n = \varepsilon^n_B$.
Yleisesti ξ on triviaali $\Leftrightarrow$ $\xi \cong \varepsilon^n_B$.

b) Sileän moniston tangenttikimppu τ_M: $E = TM$, $B = M$, $\pi(x,v) = x$ ja $F_x = T_x M$.
Jos $x \in M$ ja $h: U \to M$ koordinaatisto x:n ympärillä, niin kartta $\bar{h}: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ on konstruoitu lauseen 2.12 todistuksessa.
τ_M on sileä vektorikimppu.

Jos τ_M on triviaali, sanotaan, että M on parallelisoituva. Esimerkiksi avoin osajoukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on parallelisoituva, koska sen koordinaatisto $id: U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ antaa $\bar{id}: U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} TU$.

c) Sileän moniston $M^n \subset \mathbb{R}^k$ normaalikimppu: kokonaisavaruus

$$E = \{(x,v) \mid v \perp T_x M\} \subset M \times \mathbb{R}^k,$$

projektio $\pi: E \to M$, $\pi(x,v) = x$, vektoriavaruusrakenne periytyy $\mathbb{R}^k$:sta. Lokaali triviaalisuus todistetaan myöhemmin.

17.10.11 $\longrightarrow$

d) Reaalisen projektiivisen avaruuden $\mathbb{R}P^n$ <u>kanoninen suorakimppu</u> γ_n^1 :

$$E(\gamma_n^1) = \{([x], v) \mid v = t x \text{ jollakin } t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\pi(([x], v)) = [x]$$

Säie $(\gamma_n^1)_{[x]} = \mathbb{R}x$, pisteiden x ja $-x$ kautta kulkeva suora.

<u>väite</u>, γ_n^1 on lokaalisti triviaali

<u>tod.</u> olk. $V \subset S^n$ avoin joukko s.e. $p : V \to p(V) \overset{\text{merk.}}{=} U$ on homeomorfismi,

esim. $V = V_{\pm i}$, vrt. Esim. 2.5. b), c).

Tällöin kuvaus $h : U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}U$,

$$h([x], t) = ([x], tx), \quad x \in V, t \in \mathbb{R}$$

on homeomorfismi ja lineaarinen säikeillä. □

<u>Määr. 3.4.</u> Vektorikimpun $\xi \downarrow B$ <u>sektio</u> on jatkuva kuvaus $s : B \to E(\xi)$ s.e. $\pi \circ s = id_B$, t.s. $s(b) \in F_b \ \forall b \in B$.

Sektio <u>ei häviä missään</u>, jos $s(b) \neq 0 \in F_b \ \forall b \in B$.

Tangenttikimpun τ_M sileitä sektioita kutsutaan <u>vektorikentiksi</u>.

Selvästi triviaalilla kimpulla $B \times \mathbb{R}^n$ on ei missään häviäviä sektioita: $\underbrace{\ }_{\text{esim.}}$ $s(b) = (b, \bar{v})$, missä $\bar{v}$ on mikä tahansa kiinteä $\mathbb{R}^n$:n vektori, $\bar{v} \neq \bar{0}$. (*)

<u>Lause 3.5.</u> Kimppu $\gamma_n^1 \downarrow \mathbb{R}P^n$ ei ole triviaali.

<u>Tod.</u> Osoitamme, että jokainen γ_n^1:n sektio häviää jossain.

Ol. $s : \mathbb{R}P^n \to E(\gamma_n^1)$ sektio. Yhdistetty funktio

$$S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$$

on muotoa $x \longmapsto ([x], t(x)x)$, $x \in S^n$,

missä $t : S^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa

$$([x], t(x)x) = ([-x], t(-x)(-x)),$$

josta nähdään, että $t(-x) = -t(x)$.

Koska S^n on yhtenäinen, saa t arvon 0 jossain pisteessä $x_0 \in S^n$, joten $s([x_0]) = ([x_0], 0)$ eli s häviää pisteessä x_0.

Siis γ_n^1 ei ole triviaali (*):n nojalla.

□

Esim. 3.6. Tapaus $\gamma_1^1 \downarrow \mathbb{R}P^1$:

$\mathbb{R}P^1$ saadaan samastamalla ympyrän S^1 vastakkaiset pisteet. Tulos on

$$\mathbb{R}P^1 = \{ [(\cos\varphi, \sin\varphi)] \mid 0 \le \varphi \le \pi \} \approx S^1,$$

ja pisteet $e \in E(\gamma_1^1)$ ovat muotoa

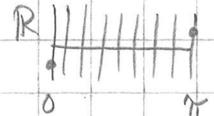
$$e = \big([(\cos\varphi, \sin\varphi)],\ t(\cos\varphi, \sin\varphi) \big), \quad 0 \le \varphi \le \pi,\ t \in \mathbb{R}.$$

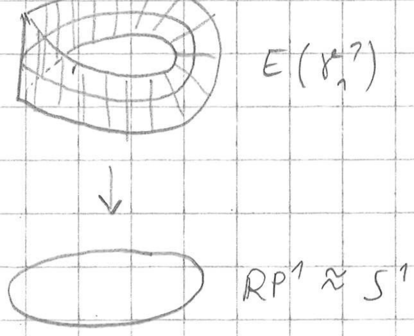
Esitys on yksikäsitteinen paitsi päätepisteissä $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$:

$$\big([(-1,0)], (-t,0) \big) = \big([(1,0)], (t,0) \big),$$

joten $E(\gamma_1^1)$ saadaan samastamalla kaistan $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ vasen ja oikea reuna kuvauksen $(0,t) \mapsto (\pi, -t)$ avulla.

$E(\gamma_1^1) \approx$ Möbiuksen nauha





$E(\gamma_1^1)$ ja $S^1 \times \mathbb{R}$ eivät ole homeomorfiset, mikä osoittaa uudelleen, että γ_1^1 ei ole triviaali kimppu.

Määr. 3.7. Sektiot $s_1, \ldots, s_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat, jos jono $(s_1(b), \ldots, s_n(b)) \in F_b$ on vapaa jono $\forall\, b \in B$.

Lemma 3.8. Olkoot ξ ja η vektorikimppuja B:n päällä ja $f: E(\xi) \to E(\eta)$ jatkuva kuvaus, jolla $f_b: F_b(\xi) \to F_b(\eta)$ on lineaarinen isomorfismi $\forall\, b \in B$.
Tällöin f on homeomorfismi ja $\xi \cong \eta$.

Tod. Ol. $b_0 \in B$. Valitaan b_0:in ympäriltä ξ:n ja η:n kartat (U,g) ja (V,h) s.e. $b_0 \in U \cap V$. Osoitetaan, että

$$(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

on homeomorfismi. Tällöin f on bijektio (seuraa suoraan oletuksista) ja lokaali homeomorfismi, siis homeomorfismi.

Jos merkitään $h^{-1}(f(g(b,x))) = (b,y)$, niin $y = (y_1, \dots, y_n)$ on muotoa

$$y_i = \sum_j f_{ij}(b)\, x_j ,$$

koska h_b^{-1}, f_b ja g_b ovat lineaarisia. Matriisit $[f_{ij}(b)]$ ovat kääntyviä (koska h_b^{-1}, f_b ja g_b ovat lin. isomorfismeja) ja matriisien alkiot ovat jatkuvia b:n funktioina (koska f on jatkuva, g, h homeomorfismeja). Muodostetaan käänteismatriisit $[F_{ji}(b)]$. Nyt

$$g^{-1}(f^{-1}(h(b,y))) = (b,x),$$

missä

$$x_j = \sum_i F_{ji}(b)\, y_i .$$

Koska luvut $F_{ji}(b)$ riippuvat jatkuvalla tavalla matriisin $[f_{ij}(b)]$ luvuista, ne riippuvat jatkuvalla tavalla b:stä.
Siis $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ on jatkuva, mistä seuraa f^{-1}:n jatkuvuus. $\square$

Lause 3.9. n-vektorikimppu ξ on triviaali $\Leftrightarrow$ sillä on n lineaarisesti riippumatonta sektiota $s_1, \dots, s_n$.

Tod. Jos $B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[h]{\cong} E(\xi)$, niin

$$s_i(b) = h(b, (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)) \in F_b, \quad 1 \le i \le n,$$

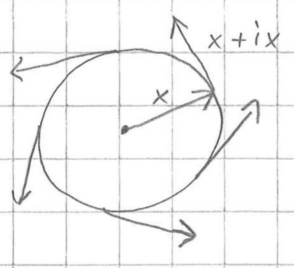
määrittelee n lineaarisesti riippumatonta sektiota.
Kääntäen, jos $s_1, \dots, s_n$ ovat lin. riippumattomia sektioita, niin kuvaus $f : B \times \mathbb{R}^n \to E(\xi)$

$$(b,x) \longmapsto x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$$

on jatkuva ja isomorfismi joka säikeellä. Lemman 3.8 nojalla f on homeomorfismi ja ξ on triviaali kimppu. $\square$

19.10.11 $\longrightarrow$

Esim. 3.10. a) S^1 on parallelisoituva:
määr. $s(x) = (x, ix) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1))$,
$x = x_1 + i x_2 \in S^1 \subset \mathbb{C}$



Vektorikenttä ei häviä missään
$\Rightarrow$ se on lin. riippumaton jono $\forall x$
$\overset{3.9.}{\Rightarrow}$ tangenttikimppu on triviaali

b) S^3 on parallelisoituva:

määr. $s_1(x) = (x, ix) = (x, (-x_2, x_1, -x_4, x_3))$
$s_2(x) = (x, jx) = (x, (-x_3, x_4, x_1, -x_2))$
$s_3(x) = (x, kx) = (x, (-x_4, -x_3, x_2, x_1))$,

$$x \in S^3 \subset \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \quad \text{(kvaterniot, quaternions)}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$
$$-ji = k, \quad -kj = i, \quad -ik = j$$

Voidaan os., että s_1, s_2, s_3 lin. riippumattomia.

c) Käyttäen Cayleyn oktonioiden $\mathbb{O}$ kertolaskua voidaan osoittaa, että S^7 on parallelisoituva:

määr. $s_i(x) = (x, \bar{s}_i(x))$, missä
$\bar{s}_1(x) = (-x_1, x_0, x_4, x_7, -x_2, x_6, -x_5, -x_3)$
$\bar{s}_2(x) = (-x_2, -x_4, x_0, x_5, x_1, -x_3, x_7, -x_6)$
$\bar{s}_3(x) = (-x_3, -x_7, -x_5, x_0, x_6, x_2, -x_4, x_1)$
$\bar{s}_4(x) = (-x_4, x_2, -x_1, -x_6, x_0, x_7, x_3, -x_5)$
$\bar{s}_5(x) = (-x_5, -x_6, x_3, -x_2, -x_7, x_0, x_1, x_4)$
$\bar{s}_6(x) = (-x_6, x_5, -x_7, x_4, -x_3, -x_1, x_0, x_2)$
$\bar{s}_7(x) = (-x_7, x_3, x_6, -x_1, x_5, -x_4, -x_2, x_0)$.

<u>Huom. 3.11.</u> a) Kervaire ja Milnor todistivat 1958, että S^1, S^3 ja S^7 ovat ainoat parallelisoituvat pallot.

b) <u>Normialgebra</u> on äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, jossa on määritelty bilineaarinen kuvaus (kertolasku)
$$A \times A \to A$$
$$(x, y) \mapsto xy,$$
jolla on ykkösalkio $1 \in A$, sekä normi $\| \ \|$ s.e. $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$.
Avaruuksille $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ ja $\mathbb{R}^8$ voidaan antaa normialgebran struktuuri, jolloin ne ovat $\cong \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$.
Voidaan osoittaa: $\mathbb{R}^n$:llä on normialgebran struktuuri $\Rightarrow$
S^{n-1} on parallelisoituva.
Siis a)-kohdan tulosta voi käyttää sen todistamiseen, että dimensiot 1, 2, 4 ja 8 ovat ainoat, joilla $\mathbb{R}^n$:lle voidaan antaa normialgebran struktuuri.
Esim. [Aguilar, Gitler, Prieto: Algebraic topology from a homotopical viewpoint, s. 315 – 329]

c) Toinen tunnettu tulos, joka liittyy e.m. käsitteisiin, on n.s. karvaisen pallon lause (hairy ball theorem), joka sanoo, että pallolla S^n, n parillinen, ei ole olemassa ei-missään-häviävää vektorikenttää.
Esim. S^2

d) Projektiivisen avaruuden tangenttikimppu voidaan kirjoittaa muodossa

$$T\mathbb{R}P^n = \{ [x,v] \mid x \in S^n, v \perp x \},$$

missä $[x,v] = \{(x,v), (-x,-v)\}$. Koska Esimerkissä 3.10 mainitut sektiot $s(x) = (x, \bar{s}(x))$ toteuttavat $\bar{s}(-x) = -\bar{s}(x)$, saadaan niistä parallelisointi myös avaruuksille $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ ja $\mathbb{R}P^7$.

Riemannin metriikat

01. V äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus.
Funktio $\mu : V \to \mathbb{R}$ on neliömuoto, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mu(v) = \sum_{i=1}^{k} l_i(v)\, l_i'(v),$$

missä jokainen l_i ja l_i' on lineaarinen.
(Esim. neliömuoto $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on muotoa $\mu(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, $a,b,c \in \mathbb{R}$)
Neliömuoto on positiivisesti definiitti, jos $\mu(v) > 0$ $\forall v \neq \bar{0}$.
Vrt. [Mantio: Vektorianalyysi, s. 64], [Honkasalo: Lin. alg., s. 129].

Funktio $f : V \times V \to \mathbb{R}$ on sisätulo, jos se on symmetrinen, bilineaarinen ja $f(v,v) \geq 0$ $\forall v \in V$ ja $f(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = \bar{0}$.
[Honkasalo: Lin. alg., s. 65]

Sisätulot ja neliömuodot vastaavat toisiaan seuraavasti:
Jos $f : V \times V \to \mathbb{R}$ on sisätulo, niin $\mu : V \to \mathbb{R}$, $\mu(v) = f(v,v)$ on (posit. definiitti) neliömuoto.
Jos $\mu : V \to \mathbb{R}$ on posit. def. neliömuoto, niin kaava

$$f(v,w) = \frac{1}{2}\left(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)\right)$$

määrittelee sisätulon.

Lineaarialgebran kurssilla osoitetaan [Honkasalo: Lin. alg., s. 129], että pos. def. neliömuodolla on n.s. pääakseliesitys:

on olemassa V:n ortonormaali kanta $(v_1, \dots, v_n)$ ja luvut $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ s.e. $\mu(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Kääntäen, tällainen kuvaus μ liittyy sisätuloon

$$f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,\ y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n .$$

Määr. 3.12. Riemannin metriikka vektorikimpulla ξ on jatkuva kuvaus

$$\mu : E(\xi) \to \mathbb{R}$$

jonka rajoittuma jokaiseen säikeeseen $\mu_b : F_b \to \mathbb{R}$ on pos. def. neliömuoto.

Riemannin monisto on sileä monisto M varustettuna Riemannin metriikalla $\mu : TM \to \mathbb{R}$.

Esim. 3.13. Triviaalilla kimpulla ε_B^n on Riemannin metriikka

$$\mu_0(b, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

koska $\tau\mathbb{R}^n$ on triviaali, on monisto $\mathbb{R}^n$ ja yleisemmin jokainen sileä monisto $M \subset \mathbb{R}^n$ Riemannin monisto; yhdistelmä

$$TM \subset T\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu_0} \mathbb{R}$$

on Riemannin metriikka.

31.10.11 →

Lemma 3.14. Olkoon ξ triviaali $\mathbb{R}^n$-kimppu B:n päällä, jolla on Riemannin metriikka μ. Tällöin on olemassa ortonormaalit sektiot $s_1, \dots, s_n : B \to E(\xi)$, t.s.

$$s_i(b) \cdot s_j(b) := \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \forall b \in B .$$

Kuvaus

$$h : (b, x) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i s_i(b) \quad \text{on isomorfismi } \varepsilon_B^n \cong \xi ,$$

jossa μ vastaa standardimetriikkaa μ_0: $\mu \circ h = \mu_0$.

Tod. Lauseen 3.9 mukaan ξ:llä on n lin. riippumatonta sektiota $s_1', \dots, s_n'$. Asetetaan

$$s_1(b) = \frac{s_1'(b)}{\mu(s_1'(b))^{1/2}}, \quad b \in B .$$

Nimittäjä on > 0, koska $s_i'(b) \neq 0 \ \forall b \in B$.

s_1 on sektio, joka toteuttaa $s_1(b) \cdot s_1(b) = \mu(s_1(b)) = 1 \ \forall b \in B$.

Jos $s_1, \dots, s_{k-1}$ on valittu $s_1', \dots, s_{k-1}'$:n lineaarikombinaatioina, s.e. $s_i \cdot s_j = \delta_{ij}$, $i, j \leq k-1$, niin

$$s_k = \frac{s_k' - \sum_{i=0}^{k-1} (s_i \cdot s_k') s_i}{\mu\left(s_k' - \sum (s_i \cdot s_k') s_i\right)^{1/2}}$$

on hyvin määritelty ja $s_i \cdot s_k = \delta_{ik}$ $\forall i \leq k$. Näin saadaan $s_1, \dots, s_n$.

Lopuksi, h on isomorfismi Lemman 3.8 nojalla, ja

$$(\mu \circ h)(b,x) = \Big(\sum_i x_i s_i(b)\Big) \cdot \Big(\sum_j x_j s_j(b)\Big)$$

$$= \sum_{i,j} x_i x_j \overbrace{s_i(b) \cdot s_j(b)}^{=\delta_{ij}} = \sum_i x_i^2 .$$

$\square$

<u>Seuraus 3.15.</u> Sileän moniston $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ normaalikimppu ν on lokaalisti triviaali (kts. Esim. 3.3 c)).

<u>Tod.</u> Olkoon $x \in M$ ja U ympäristö, jossa tangenttikimppu τ_M on triviaali. Lemman 3.14 nojalla $\exists$ ortonormaalit sektiot $s_1, \dots, s_n : U \to \pi^{-1}U \subset U \times \mathbb{R}^{n+k}$, $s_i(y) = (y, \bar{s}_i(y))$. Tällöin vektorit $\bar{s}_1(x), \dots, \bar{s}_n(x) \in \mathbb{R}^{n+k}$ ovat lin. riippumattomat ja $(e_1, \dots, e_{n+k})$ on kanta.

Valitaan nyt k kpl vektoreista $e_1, \dots, e_{n+k}$ siten, että nämä yhdessä vektorien $\bar{s}_1(x), \dots, \bar{s}_n(x)$ kanssa muodostavat $\mathbb{R}^{n+k}$:n kannan (HT); void. ol., että nämä ovat $e_{n+1}, \dots, e_{n+k}$.

Olkoon nyt $V \subset U$ se M:n osajoukko, jossa $\det(\bar{s}_1(y), \dots, \bar{s}_n(y), e_{n+1}, \dots, e_{n+k}) \neq 0$. $V \subset U$ on avoin, $x \in V$ ja joukossa V (siis $\forall y \in V$) ovat vektorit $\bar{s}_1(y), \dots, \bar{s}_n(y), e_{n+1}, \dots, e_{n+k}$ lin. riippumattomat. Soveltamalla Gram-Schmidtin prosessia (lemman 3.14 todistus) uudelleen saadaan joukossa V ortonormaalit funktiot $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n+k} : V \to \mathbb{R}^{n+k}$.

Määritellään ν:n kartta joukossa V kaavalla

$$h : V \times \mathbb{R}^k \to E(\nu)$$

$$h(y, v) = \big(y, v_1 \bar{s}_{n+1}(y), \dots, v_k \bar{s}_{n+k}(y)\big).$$

Koska $\bar{s}_{n+1}(y), \dots, \bar{s}_{n+k}(y)$ on normaalikimpun säikeen $T_yM^{\perp}$ kanta $\forall y \in V$, on h isomorfismi säikeillä, joten väite seuraa Lemmasta 3.8.

$\square$

<u>Vektorikimpun konstruktio siirtymäkuvauksista</u>

01. $\xi = (E, \pi, B)$ $\mathbb{R}^n$-kimppu

Jos (U_i, h_i) ja (U_j, h_j) ovat karttoja ja $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, niin homeomorfismi

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h_i|} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{h_j^{-1}|} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, v) \longmapsto (x, g(x)v)$$

määrittelee lineaarisen isomorfismin $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja siis matriisin $g(x) \in Gl(n, \mathbb{R})$ $\forall x \in U_i \cap U_j$.

Varustetaan kääntyvien matriisien joukko $Gl(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ aliavaruustopologialla.

Kuvaus $g : U_i \cap U_j \to Gl(n,\mathbb{R})$ on jatkuva, koska matriisin $g(x)$ k. sarake $c_k(x)$ on x:n jatkuva funktio:

$$x \longmapsto (x, e_k) \xmapsto{h_j^{-1}\circ h_i} (x, c_k(x)) \longmapsto c_k(x).$$

Kuvaus $g : U_i \cap U_j \to Gl(n,\mathbb{R})$ on kimpun ξ siirtymäkuvaus (engl. transition function)

Olkoon $(U_i)_{i\in I}$ B:n avoin peite s.e. (U_i, h_i) ovat karttoja. Jokaisella parilla (i,j) saadaan jatkuvat funktiot

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \to Gl(n,\mathbb{R}) \quad \text{kuten yllä,}$$

jotka toteuttavat ehdon

$$(*) \qquad g_{kj} \cdot g_{ji} = g_{ki} : U_i \cap U_j \cap U_k \to Gl(n,\mathbb{R}).$$

(eli $g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \ \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$)

Erityisesti $g_{ii} = id$, $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

Kääntäen:

Lause 3.16. Olkoon $(U_i)_{i\in I}$ avaruuden B avoin peite ja $g_{ji} : U_i \cap U_j \to Gl(n,\mathbb{R})$ jatkuvia kuvauksia $(i,j\in I)$, jotka toteuttavat ehdon $(*)$. Tällöin $\exists$ vektorikimppu $\xi = (E, \pi, B)$ ja ξ:n kartasto (U_i, h_i), jonka siirtymäkuvaukset ovat g_{ji}.

Tod. Olkoon $T = \{(x,v,i) \mid x\in U_i, v \in \mathbb{R}^n, i \in I\} \subset B \times \mathbb{R}^n \times I$

$$= \bigcup_{i\in I} U_i \times \mathbb{R}^n \times \{i\}.$$

Jos I:lle annetaan diskreetti topologia, on T topologinen avaruus, joka on erillinen yhdiste avoimista aliavaruuksistaan $U_i \times \mathbb{R}^n = U_i \times \mathbb{R}^n \times \{i\}$, $i \in I$.

Määritellään relaatio

$$(x,v,i) \sim (x',v',j) \iff x = x' \text{ ja } g_{ji}(x)v = v'.$$

$\sim$ on ekvivalenssirelaatio ehdon $(*)$ nojalla.

Olkoon $E = T/\sim$ tekijäavaruus ja $q : T \to E$ tekijäkuvaus $q(x,v,i) = [x,v,i]$.

Projektio $p : E \to B$ määritellään $p[x,v,i] = x$ ja karttakuvaukset

$$h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to E$$

$$h_i(x,v) = [x,v,i].$$

Yksityiskohdat HT.

$\square$

Vektorikimput voidaan siis kuvailla pelkkien siirtymäkuvausten g_{ij} avulla. Vastaavasti määritellään yleisempi käsite säiekimppu, jonka säie on F ja rakenneryhmä (structure group) G, korvaamalla $G\ell(n,\mathbb{R})$ topologisella ryhmällä G ja $\mathbb{R}^n$ avaruudella F, jossa ryhmä G toimii. Tämä lähestymistapa vastaa Whitneyn alkuperäistä pallokimpun määritelmää (1935). Tapaus, jossa säie F on sama kuin ryhmä G, on nimeltään pääsäiekimppu (principal fibre bundle). Kts. [Steenrod: The Topology of Fibre Bundles, § 2-3].

4. Operaatioita kimpuilla

Määr. 4.1. Ol. $\xi = (E, \pi, B)$ vektorikimppu ja $B_1 \subset B$. Tällöin $\xi|B_1 = (E_1, \pi_1, B_1)$, missä $E_1 = \pi^{-1}(B_1)$, $\pi_1 = \pi|E_1$, on myös vektorikimppu, ξ:n rajoittuma joukkoon B_1, kun säikeille $F(\xi|B_1)_b = F(\xi)_b$ annetaan alkuperäinen vektoriavaruus-rakenne. $\xi|B_1$ nähdään lokaalisti triviaaliksi rajoittamalla kartat.

Esim. 4.2. a) Triviaalin kimpun $B \times \mathbb{R}^n$ rajoittuma on triviaali.

b) Jos M on sileä monisto ja $U \overset{\circ}{\subset} M$, niin $\tau_U = \tau_M|U$.

c) $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ kuvauksella $[x] \mapsto [(x,0)]$, $x \in S^n$.
Tällöin kanoninen suorakimppu $\gamma_n^1 = \gamma_{n+1}^1 | \mathbb{R}P^n$.

Rajoittuma on erikoistapaus yleisemmästä tilanteesta:
Ol. $\xi = (E, \pi, B)$ vektorikimppu ja $f: B_1 \to B$ jatkuva kuvaus.

Määr. 4.3. Indusoitu kimppu $f^*\xi$ on vektorikimppu, jonka kanta-avaruus on B_1, kokonaisavaruus

$$E_1 = \{(b,e) \mid f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E$$

ja projektio $\pi_1(b,e) = b$.

HT { Kuvaus $\hat{f}: E_1 \to E$, $(b,e) \mapsto e$, määrittelee homeomorfismin $\pi_1^{-1}(b) \cong \pi^{-1}(f(b))$.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Säikeille $F_b(f^*\xi)$ annetaan vektoriavaruusrakenne bijektion $\hat{f}$ välityksellä.