2. Differentioituvat monistot

Palautetaan mieleen perusteita differentioituvuudesta $\mathbb{R}^n$:ssä.

Ol. $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus; f:n <u>i's osittaisderivaatta pisteessä</u> $x_0 \in U$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R},$$

missä e_i on i's yksikkövektori $(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

Sanomme, että $f \in C^1(U)$, jos $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ on olemassa $\forall x \in U$, $1 \le i \le n$, ja kuvaukset $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia.

Jos $f \in C^1(U)$, sanotaan, että $f \in C^2(U)$, jos ositt. derivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(U)$ jne.

<u>Määritelmä 2.1.</u> Jatkuva funktio $f: U \to \mathbb{R}$ on <u>sileä</u>, jos $f \in C^k(U)$ $\forall k > 0$ eli kaikki osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$$

ovat olemassa ja jatkuvia U:ssa.

Jatkuva funktio $f: U \to \mathbb{R}^k$ on <u>sileä</u>, jos kaikki koordinaattifunktiot $f_i = pr_i \circ f$ ovat sileitä. Merk. $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$.

C^1-funktion $f: U \to \mathbb{R}^k$ <u>differentiaali</u> pisteessä $x \in U$ on lineaarikuvaus

$$Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

jonka matriisi on

$$Df(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad 1 \le i \le \cancel{n}\ k, \ 1 \le j \le \cancel{k}\ n. \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Tällöin

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \|h\| \varepsilon(h), \quad \text{missä } \varepsilon(h) \to 0, \text{ kun } h \to 0,$$

kts. esim. [Martio: Vektorianalyysi, 2.6].

<u>Lause 2.2.</u> (ketjusääntö) Jos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $f: U \to V$, $g: V \to \mathbb{R}^k$ ovat sileitä, niin $g \circ f: U \to \mathbb{R}^k$ on sileä ja

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

(Vrt. Martio, Lause 2.6.6) □

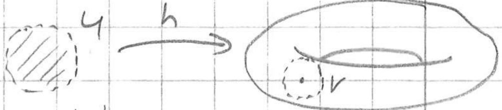
<u>Lause 2.3.</u> (käänteiskuvauslause) Jos $G \subset \mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}^n$ on sileä ja $Df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kääntyvä jollakin $x_0 \in G$, niin on olemassa x_0:n avoin ympäristö U ja avoin $V \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $f: U \to V$ on bijektio ja f^{-1} on sileä.

(Vrt. Martio, Lause 3.3.1)

□

Bijektiota $f: U \to V$, jolla f ja f^{-1} ovat sileitä sanotaan <u>diffeomorfismiksi</u>. Käänteiskuvauslauseen mukaan sileä kuvaus, jonka differentiaali on kääntyvä pisteessä x_0, on diffeomorfismi jossain x_0:n ympäristössä.

<u>Määr. 2.4.</u> <u>Topologinen</u> <u>n-monisto</u> M on numeroituvakantainen Hausdorffin avaruus, joka on lokaalisti homeomorfinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa, t.s. $\forall x \in M$ $\exists$ avoin ymp. V ja homeomorfismi $h: U \to V$, missä $U \subset \mathbb{R}^n$. (U, h) on <u>koordinaatisto</u> x:n ympärillä.



<u>Esim. 2.5.</u> a) Jokainen avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on n-monisto.

b) Pallo $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ on n-monisto: merkitään $V_i = \{ x \in S^n \mid x_i > 0 \}$, $V_{-i} = \{ x \in S^n \mid x_i < 0 \}$. Tällöin $V_1, \dots, V_{n+1}, V_{-1}, \dots, V_{-(n+1)}$ on S^n:n avoin peite ja joukot $V_{\pm i}$ ovat homeomorfisia avoimen pallon $B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ kanssa:

$$h_{\pm i}: B^n \to V_{\pm i}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \textstyle\sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n \right)$$

on homeomorfismi.

c) Reaalinen projektiivinen avaruus $\mathbb{R}P^n$, kts. Esim. 1.7
Merk. $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ projektio ja $[x] = p(x)$, $x \in S^n$.
Joukot $U_i = \{ [x] \mid x_i \neq 0 \}$ ovat avoimia, koska $p^{-1}(U_i) = V_i \cup V_{-i}$ ja $p: V_i \to U_i$ on homeomorfismi, joten $\mathbb{R}P^n$ on n-monisto.

Tutkimme jatkossa <u>sileitä monistoja</u>, jotka yksinkertaisuuden vuoksi oletamme upotetuiksi johonkin euklidiseen avaruuteen. Tämä ei ole rajoitus, koska voidaan osoittaa, että jokainen topologinen n-monisto voidaan upottaa avaruuteen $\mathbb{R}^{2n+1}$, ja sileälle monistolle upotus voidaan valita sileäksi (Whitney 1936, kts. esim. Auslander–Mackenzie: Introduction to diff. manifolds, Theorem 6-3)

<u>Määr. 2.6.</u> Aliavaruus $M \subset \mathbb{R}^k$ on <u>sileä</u> <u>n-monisto</u>, jos $\forall x \in M$ $\exists$ sileä funktio $h: U \to \mathbb{R}^k$ s.e.

1) h on homeomorfismi avoimelta joukolta $U \subset \mathbb{R}^n$ x:n avoimelle ympäristölle $V \subset M$

2) kun $u \in U$, on differentiaali $Dh(u): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ injektio.

Huom. 2.7. $\mathbb{R}^k$:n aliavaruutena M on automaattisesti N_2 ja Hausdorff; siis sileä n-monisto on topologinen n-monisto, jonka koordinaattikuvauksilta vaaditaan differentioituvuus jonkin upotuksen $h: U \to V \subset M \subset \mathbb{R}^k$ suhteen.
Ehto 2) voidaan myös lausua muodossa: ositt. derivaatat
$$\frac{\partial h}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial h_k}{\partial u_i}\right) : U \to \mathbb{R}^k$$
ovat lineaarisesti riippumattomia joka pisteessä $u \in U$ (k.o. vektorit ovat matriisin $Dh(u)$ sarakkeet. Lin.alg. $\Rightarrow$ "lin. kuvaus on injektio $\Leftrightarrow$ sen matriisin sarakkeet ovat lin. riippumattomia").

Esim. 2.8. Kaikki esimerkin 2.5 monistot ovat sileitä.

a) Avoin $U \subset \mathbb{R}^n$ ok. (voidaan valita $h = id$)

b) Pallo $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Kuvausten $h_{\pm i}$ differentiaali

$$Dh_{\pm i}(u) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mp\frac{u_1}{\sqrt{1-\sum u_i^2}} & \mp\frac{u_2}{\sqrt{1-\sum u_i^2}} & \dots & \mp\frac{u_n}{\sqrt{1-\sum u_i^2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

on injektio, koska jättämällä pois i. rivi saadaan yksikkömatriisi.

c) Upotetaan $\mathbb{R}P^n$ euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^{2n+1}$:
tarkastellaan ensin kuvausta $h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}) = \Big(x_1^2,\ 2x_1x_2,\ \dots,\ \overset{\overset{(i-1)}{\downarrow}}{\sum_{\nu=1}^{i} x_\nu x_{i-\nu}},\ \dots,\ \overset{\overset{(2n+1)}{\downarrow}}{x_{n+1}^2}\Big),$$

h:n koordinaatit ovat polynomin $h_x(t) = (x_1 + x_2 t + \dots + x_{n+1} t^n)^2$ kertoimet.
Nyt $h(x) = h(y) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x = \pm y$, joten rajoittuma $h|S^n$ faktoroituu p:n kautta, t.s. $\exists\, g: \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$
s.e. kaavio

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^{2n+1} \\ \mathbb{R}P^n \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Väite. g on upotus, eli $\mathbb{R}P^n \approx h(S^n)$. Merk. $\bar{g} : \mathbb{R}P^n \to h(S^n)$.

tod. $(*)$:n nojalla $\bar{g}$ on bijektio. Se on jatkuva, koska p on tekijäkuvaus ja h on jatkuva. Koska $\mathbb{R}P^n = p(S^n)$ on kompakti, on $\bar{g}$ homeomorfismi.

$\square$

Samastetaan $\mathbb{R}P^n$ ja $h(S^n)$, siis $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Differentiaali $Dh(x)$ on injektio joka pisteessä $x \neq 0$:

$$Dh(x) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n+1} & x_n & \cdots & x_1 \\ 0 & x_{n+1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Jos $x_1 \neq 0$, on vasemman yläkulman alideterminantti $(2x_1)^{n+1} \neq 0$ (mistä injektiivisyys seuraa). Jos taas $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, on yhtä riviä alempi alideterminantti $(2x_2)^{n+1} \neq 0$ jne.

Yhdistelmät $g_i : B^n \xrightarrow{h_i} V_i \xrightarrow{p} U_i \subset \mathbb{R}P^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{2n+1}$ ovat homeomorfismeja avoimille joukoille $g(U_i)$. Ne ovat sileitä ja differentiaali $Dg_i = Dh \circ Dh_i$ on injektio joka pisteessä $u \in B^n$. Siis $\mathbb{R}P^n$ on sileä n-monisto.

$\square$ Esim. 1.7 c)

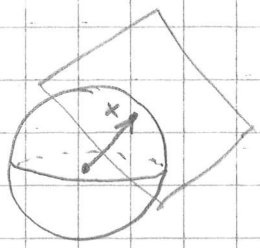
Tangenttiavaruus

Yleistetään seuraavaksi differentiaalin käsite sileiden monistojen välisille kuvauksille. Koska differentiaali on kuvauksen lineaariapproksimaatio, määritellään ensin sileän moniston lineaariapproksimaatio annetussa pisteessä, n.s. tangenttiavaruus. Käyrän approksimaatio on sen tangenttisuora.

Olk. $M \subset \mathbb{R}^k$ sileä n-monisto, $x \in M$.

Määr. 2.9. Vektori $v \in \mathbb{R}^k$ sivuaa monistoa M pisteessä x, jos v on jonkin sileän käyrän $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $p(0) = x$, nopeusvektori $v = p'(0)$. Pisteessä x M:ää sivuavien vektorien joukko $T_x M$ on moniston M tangenttiavaruus pisteessä x.

Esim. 2.10. $M = S^2$



Lause 2.11. Olkoon $h : U \to M$ koordinaatisto pisteen x ympärillä, $h(0) = x$. Tällöin

$$v \in T_x M \iff v = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u_i}(0)}_{\in \mathbb{R}^k} \quad \text{joillain } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

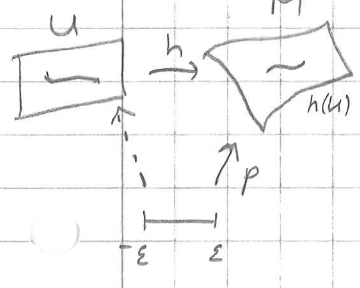
Siis $T_x M$ on n-ulotteinen vektoriavaruus.

Tod. "$\Leftarrow$" Jos $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, niin käyrä $p(t) = \overbrace{h(c_1 t, \dots, c_n t)}^{\in M}$ on määritelty jossain 0:n ympäristössä $(-\varepsilon, \varepsilon)$, se on sileä ja $p'(0) \overset{(HT)}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0) \in T_x M$.

"$\Rightarrow$" Olk. $v \in \mathbb{R}^k$ jonkin käyrän $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ nopeusvektori pisteessä 0: $v = p'(0)$. Voidaan olettaa (pienentämällä lukua ε tarvittaessa), että $p(-\varepsilon, \varepsilon) \subset h(U)$.

väite. $h^{-1} \circ p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^n$ on sileä

tod. Koska $dh(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on injektio, voidaan valita $k_1, \dots, k_n$ s.e. matriisi $\left(\frac{\partial h_{k_i}}{\partial x_j}(0) \right)$ on kääntyvä (HT). Käänteiskuvauslauseen 2.3 mukaan tällöin voidaan ratkaista $u_i = f_i(h_{k_1}(u), \dots, h_{k_n}(u))$ sileinä funktioina f_i jossain 0:n ympäristössä. Kirjoitetaan $u = f(h_{k_1}(u), \dots, h_{k_n}(u))$, jolloin ehdosta $\overset{h(u(t))}{h(u)} = p(t)$ nähdään, että $u(t) = h^{-1} \circ p(t) = f(p_{k_1}(t), \dots, p_{k_n}(t))$ on sileä. $\square$



Jos merkitään $h^{-1} \circ p(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, niin

$$v = \frac{dp}{dt}(0) = \frac{d}{dt}\left(h \circ (h^{-1} \circ p)\right)(0) = \sum q_i'(0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(0).$$

Koska $dh(0)$ on injektio, ovat $\frac{\partial h}{\partial u_i}(0)$ lineaarisesti riippumattomia ja siis $\dim T_x M = n$.

$\square$

<u>Seuraus 2.12.</u> M:n <u>tangenttikimppu</u> $TM = \{(x,v) \mid x \in M,\ v \in T_x M\} \subset M \times \mathbb{R}^k$

on sileä $2n$-monisto.

<u>Tod.</u>

Olkoon $U \xrightarrow{h} V \subset M$ koordinaatisto, $h(0) = x$. Tällöin

$$\bar{h} : U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$$

$$(u, c_1, \ldots, c_n) \mapsto \left(h(u),\ \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0)\right)$$

on TM:n koordinaatisto:

$D\bar{h}(u,c) = (Dh(u), Dh(0))$ on injektio, koska $\frac{\partial h}{\partial u_i}(u) \in \mathbb{R}^k \times 0$, $1 \le i \le n$, ja $\frac{\partial h}{\partial u_i}(0) \in 0 \times \mathbb{R}^k$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

$$\left[\begin{array}{c|c} Dh(u) & 0 \\ \hline 0 & Dh(0) \end{array}\right]$$

$\square$

<u>Lause 2.13.</u> Jos M^m ja N^n ovat sileitä monistoja, niin $M \times N$ on sileä monisto ja $T_{(x,y)} M \times N \cong T_x M \oplus T_y N$.

<u>Tod.</u> HT.

$\square$

12.10.11 →

<u>Sileät funktiot</u>

Ol. $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^\ell$ sileitä monistoja, $f : M \to N$ funktio, $x \in M$.

<u>Määr. 2.14.</u> f on <u>sileä pisteessä</u> x $\iff$ on olemassa koordinaatisto $h : U \to M$, $h(0) = x$ s.e. $f \circ h : U \to N \subset \mathbb{R}^\ell$ on sileä.

Seuraavan lemman nojalla ehdosta seuraa, että $f \circ h'$ on sileä kaikilla koordinaatistoilla $h' : U' \to M$.

<u>Lemma 2.15.</u> Jos $h : U \to M$ ja $h' : U' \to M$ ovat koordinaatistoja ja $h(U) \cap h'(U') \neq \emptyset$, niin $u' \mapsto h^{-1}(h'(u'))$ on sileä kuvaus U:n ja U':n avoimien osajoukkojen välillä.

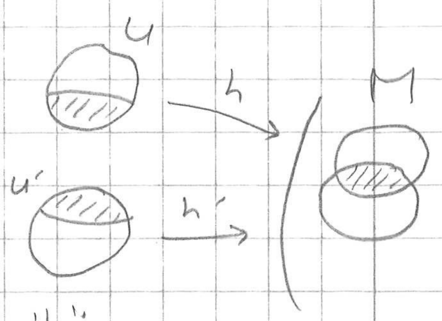
Tod. Olkoon $x_0 = h(u_0) = h'(u_0')$. Kuten lauseen 2.11 todistuksessa, u voidaan ratkaista sileänä funktiona

$$u_j = f_j\left(h_{k_1}(u), \ldots, h_{k_n}(u)\right), \quad 1 \le j \le n$$

jossain u_0:in ympäristössä, jolloin

$h(u) = h(u') \Rightarrow$

$$u = h^{-1}h'(u') = f\left(h'_{k_1}(u), \ldots, h'_{k_n}(u)\right) \text{ on sileä.}$$



□

Siis $f \circ h$ on sileä $\Rightarrow$ $f \circ h' = f \circ h \circ (h^{-1} \circ h')$ on sileä.

f on <u>sileä</u>, jos se on sileä jokaisessa pisteessä $x \in M$ ja <u>diffeomorfismi</u>, jos se on sileä bijektio, ja f^{-1} on sileä.

<u>Lemma 2.16.</u> a) $id : M \to M$ on sileä

b) Jos $g : M \to M'$ ja $f : M' \to M''$ ovat sileitä, niin $f \circ g : M \to M''$ on sileä.

<u>Tod.</u> HT

□

Pisteessä x sileä kuvaus $f : M \to N$ määrittelee lineaarikuvauksen

$$Tf_x : T_x M \to T_{f(x)} N$$

seuraavasti:

jos $v \in T_x M$ ja p on pisteen x kautta kulkeva sileä polku, jolle $v = \frac{dp}{dt}(0) \in T_x M$, määritellään

$$Tf_x(v) = \frac{d(f \circ p)}{dt}(0).$$

Lokaaleissa koordinaateissa $U \xrightarrow{h} M$ lausuttuna

$$Tf_x\left(\sum c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0)\right) = \sum c_i \frac{\partial (f \circ h)}{\partial u_i}(0), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

vrt. lause 2.11, mikä osoittaa, että Tf_x on hyvin määritelty ja lineaarinen.

Tf_x on f:in <u>differentiaali</u> <u>pisteessä</u> x.

Sileä funktio $f: M \to N$ määrittelee tangenttikimppujen välisen kuvauksen $Tf: TM \to TN$ kaavalla

$$Tf(x,v) = (f(x), Tf_x(v)).$$

Tf on siis pohjalla kuvaus f ja säikeillä $T_xM \to T_{f(x)}N$ lineaarinen differentiaali Tf_x.

Lemma 2.17. Jos f on sileä kuvaus, niin Tf on sileä, $T(id) = id$ ja $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$. $\square$

Seuraus 2.18. Jos f on diffeomorfismi $M \to N$, niin Tf on diffeomorfismi $TM \to TN$. $\square$

3. Vektorikimput (engl. vector bundle)

Sileän moniston tangenttikimppu sisältää jokaisen moniston pisteen "päällä" vektoriavaruuden. Yleisemmin, olkoon B topologinen avaruus, n.s. kanta-avaruus (engl. base space).

Määr. 3.1. n-ulotteinen vektorikimppu ξ avaruudella B on kolmikko (E, π, B), missä

1) $E = E(\xi)$ on topologinen avaruus, n.s. kokonaisavaruus (engl. total space)
2) $\pi: E \to B$ on jatkuva surjektio, n.s. projektio
3) $\forall b \in B$ säie $F_b = \pi^{-1}(b)$ on varustettu reaalisen vektoriavaruuden struktuurilla

joka toteuttaa seuraavan lokaalin triviaalisuusehdon:

$\forall b \in B$ $\exists$ b:n avoin ympäristö $U \subset B$ ja homeomorfismi

$$h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U,$$

s.e. $\forall b \in U$ kuvaus $h_b: \{b\} \times \mathbb{R}^n \to F_b$ on vektoriavaruusisomorfismi.

Merkitään $\xi \downarrow B$. Määritelmästä seuraa, että kaavio

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}U \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutoi.