Tähän asti olemme seuranneet J. Väisälän kirjaa Topologia II (Limes ry 2005) s. 150–180)

1. Perusryhmä: sovelluksia ja esimerkkejä

1.1. Algebran peruslause: Jokaisella $\mathbb{C}$-kertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on juuri $\mathbb{C}$:ssä. Siis: jos

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n,$$

$n > 0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, niin $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ s.e. $P(z_0) = 0$.

Tod. Vastaoletus: P:llä ei ole juurta; tällöin P määrittelee jatkuvan funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Olk. $\mu = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1$ ja $z \in S^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$.

Nyt

$$|f(\mu z) - \mu^n z^n| = |a_0 + a_1 \mu z + \dots + a_{n-1} \mu^{n-1} z^{n-1} + \mu^n z^n - \mu^n z^n|$$

$$\leq |a_0| + \mu |a_1| + \dots + \mu^{n-1} |a_{n-1}|$$

$$\leq \mu^{n-1} (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|) \qquad \text{koska } \mu \geq 1$$

$$\underset{\mu\text{:n määr.}}{<} \mu^n = |\mu^n z^n| .$$

Siis $\forall z \in S^1$: jana pisteestä $f(\mu z)$ pisteeseen $\mu^n z^n$ ei sisällä origoa, joten void. määr. homotopia

$$H : S^1 \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

kaavalla

$$H(z, t) = (1-t) f(\mu z) + t \mu^n z^n .$$

Siis arvolla $t = 0$ saadaan funktio $z \mapsto f(\mu z)$ ja arvolla $t = 1$ funktio $g: z \mapsto \mu^n z^n$.

Funktio $z \mapsto f(\mu z)$ on nollahomotooppinen:
$$(z,t) \longmapsto f((1-t)\mu z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$
Siis myös $g: S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ on nollahomotooppinen.
Yhdistetään g retraktioon $r: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S^1$,
$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$
ja saadaan $r \circ g: S^1 \to S^1$
$$z \longmapsto \frac{\mu^n z^n}{|\mu^n z^n|} \underset{\substack{\uparrow \\ \mu^n \in \mathbb{R},\ \mu^n > 0}}{=} \frac{\mu^n z^n}{\mu^n |z^n|} = \frac{z^n}{|z^n|} \underset{\substack{\uparrow \\ |z^n| = 1}}{=} z^n .$$

g nollahomotooppinen $\Rightarrow$ $r \circ g$ nollahomotooppinen.
$$\left(g \simeq c_{z_0} \Rightarrow r \circ g \simeq r \circ c_{z_0} = c_{r(z_0)} \right).$$

Tämä on ristiriita seuraavan lauseen nojalla. $\square$

<u>Lause 1.2.</u> Olk. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Tällöin funktio
$$\varphi: S^1 \to S^1, \quad \varphi(z) \mapsto z^n,$$
ei ole nollahomotooppinen.

<u>Tod.</u> Antiteesi: $\varphi \simeq c$, void. ol. $\varphi \simeq c_1$.

(HT 21:16 : Olk. X av., $x_0 \in X$ ja $f, g: X \to S^1$ kuvauksia, joilla $f(x_0) = g(x_0)$ ja $f \simeq g$. Tällöin $f \simeq g$ rel x_0.)

HT 21:16 $\Rightarrow$ $\exists$ homotopia $H: \varphi \simeq c_1$ rel 1.

Tark. sitten silmukkaa $\gamma: I \to S^1$
$$\gamma(s) = e^{2\pi i s}$$
Nyt $\varphi \circ \gamma$ on silmukka $s \longmapsto e^{2\pi n i s}$
ja
$$I \times I \xrightarrow{\gamma \times \mathrm{id}} S^1 \times I \xrightarrow{H} S^1$$
on polkuhomotopia $\varphi \circ \gamma \sim \varepsilon_1$, mikä on ristiriita Lauseen V:25.2 kanssa.
$$\left[\begin{array}{lllll} (s,0) & \mapsto & (\gamma(s), 0) & \longmapsto & \varphi \circ \gamma(s) \\ (s,1) & \mapsto & (\gamma(s), 1) & \longmapsto & 1 \\ (0,t) & \mapsto & (1, t) & \longmapsto & 1 \\ (1,t) & \mapsto & (1, t) & \longmapsto & 1 \end{array} \right].$$
$\square$

Seuraavaksi tutkimme pallojen S^n yhdesti yhtenäisyyttä.

<u>Lause 1.3.</u> Pallot S^n, $n \geq 1$, ovat polkuyhtenäisiä.

<u>Tod.</u> Topologia I, 14.28.5

$\square$

Ympyrä S^1 ei ole yhdesti yhtenäinen (V: 24.12.2).
Osoitamme seuraavaksi, että pallot S^n, $n \geq 2$, ovat yhdesti yhtenäisiä.
Ensin yleisempi tulos:

<u>Lause 1.4.</u> (Seifert - van Kampen)
Olkoon $X = X_1 \cup X_2$, missä $X_1, X_2 \subset X$ ovat avoimia ja yhdesti yhtenäisiä ja $X_1 \cap X_2$ on polkuyhtenäinen. Olk. kantapiste $x_0 \in X_1 \cap X_2$.
Tällöin $\pi(X, x_0) = 0$.

<u>Tod.</u> Y.o. oletuksilla avaruus X on polkuyhtenäinen.
Ol. $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Nyt $\{\alpha^{-1}(X_1), \alpha^{-1}(X_2)\}$ on I:n avoin peite, joten sillä on Lebesguen luku $\lambda > 0$ s.e. jokainen I:n osaväli J, jonka pituus on $< \lambda$, sisältyy jompaankumpaan joukoista $\alpha^{-1}(X_1)$, $\alpha^{-1}(X_2)$.
Olk. $n \in \mathbb{N}$ s.e. $\frac{1}{n} < \lambda$ ja tark. I:n jakoa
$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1.$$
Tällöin $\alpha\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \subset X_1$ tai X_2 $\forall k$. Jättämällä tarvittaessa pois jakopisteitä saadaan jako $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ s.e. $\alpha[t_{i-1}, t_i]$ ja $\alpha[t_i, t_{i+1}]$ sisältyvät aina eri joukkoihin X_1, X_2.
Tällöin $\alpha(t_i) \in X_1 \cap X_2$ $\forall i$.
Jokaisella $0 < i < m$ val. polku $\beta_i : I \to X_1 \cap X_2$ pisteestä x_0 pisteeseen $\alpha(t_i)$. Merk. $\alpha_i : I \to X$ polkua $\alpha|[t_{i-1}, t_i]$ yksikkövälille parametrisoituna. Tällöin
$$\alpha \sim \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \sim (\alpha_1 \overleftarrow{\beta_1})(\beta_1 \alpha_2 \overleftarrow{\beta_2}) \dots (\beta_{m-1} \alpha_m)$$
Jokainen osasilmukka on $\sim \varepsilon_{x_0}$, koska ne ovat X_1:n tai X_2:n silmukoita ja X_1, X_2 ovat yhdesti yhtenäisiä. Siis $\alpha \sim \varepsilon_{x_0}$ ja $\pi(X, x_0) = 0$.

$\square$

Huom. Yleinen Seifert–van Kampenin lause kertoo, miten $\pi(X, x_0)$ lasketaan ryhmien $\pi(X_1, x_0)$, $\pi(X_2, x_0)$ ja $\pi(X_1 \cap X_2, x_0)$ avulla, kun $X_1, X_2 \subset X$ ovat avoimia ja polkuyhtenäisiä ja $X_1 \cap X_2$ on polkuyht.

Pallon S^n käsittelyyn käytämme kahta standardikuvausta:

$$\pi : (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (S^n, e_{n+1}) \qquad (e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1})$$

on määritelty kaavalla

$$\pi(y) = \left(2\sqrt{1-|y|^2}\, y,\ 2|y|^2 - 1\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}.$$

Se toteuttaa

$$|\pi(y)| = 1, \quad \pi^{-1}(e_{n+1}) = S^{n-1}.$$

Rajoittuma avoimelle kuulalle B^n on homeomorfismi

$$B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$$

käänteiskuvauksenaan $\rho : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to B^n$,

$$\rho(\underbrace{z, t}_{\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}) = \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}.$$

Kuvaus π indusoi siis jatkuvan bijektion $\bar{\pi} : \bar{B}^n / S^{n-1} \to S^n$ (kanoninen hajotelma)

$$\begin{tikzcd} \bar{B}^n \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \bar{B}^n / S^{n-1} \arrow[r, "\bar{\pi}"'] & S^n \end{tikzcd}$$

Koska $\bar{B}^n$ on kompakti, S^n Hausdorff, niin π on samastuskuvaus (V: 15.16), joten V: 9.10 $\Rightarrow$ $\bar{\pi}$ on homeomorfismi.

Toinen standardikuvaus on homeomorfismi

$$\pi' : B^n \to \mathbb{R}^n, \quad \pi'(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

käänteiskuvauksenaan

$$\rho' : \mathbb{R}^n \to B^n, \quad \rho'(z) = \frac{z}{1+|z|}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan homeomorfismi

$$S^n \setminus \{e_{n+1}\} \xrightarrow{(\pi|)^{-1}} B^n \xrightarrow{\pi'} \mathbb{R}^n.$$

<u>Lause 1.5.</u> S^n on yhdesti yhtenäinen, kun $n \geq 2$.

<u>Tod.</u> $S^n = U_1 \cup U_2$, missä $U_1 = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ ja $U_2 = S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ ovat avoimia ja $U_1 \cong U_2 \cong \mathbb{R}^n$ (edell. sivu).
S^n on polkuyhtenäinen (Lause 1.3).
Koska $\mathbb{R}^n$ on yhdesti yhtenäinen, ovat U_1, U_2 yhdesti yhtenäisiä
ja leikkaus $U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times (-1,1)$ $\left((z,t) \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, t\right)\right)$ (HT)
on polkuyhtenäinen, kun $n \geq 2$.
Lauseen 1.4. nojalla $\pi(S^n, x_0) = 0$ $\forall x_0 \in S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$
ja V: 23.7. $\Rightarrow$ $\pi(S^n, x_0) = 0$ $\forall x_0 \in S^n$. $\square$

1.10.14 $\rightarrow$

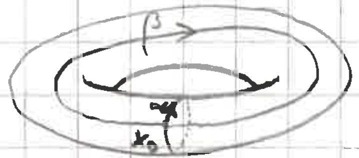
<u>Esim. 1.6.</u>
<u>Torus $T^n = (S^1)^n$, $n \geq 2$</u>

Koska $\pi(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$, saadaan suoraan harjoitustehtävän 23:4 (Väisälä, s. 166)

$$\pi(T^2) = \pi(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

missä siis laskutoimituksen antaa kaava $(m,n) + (m',n') = (m+m', n+n')$.

Induktiolla $\pi(T^n) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ kpl}}$.



"virittäjät $\bar{\alpha}$ ja $\bar{\beta}$"

Vrt. V: Esim. 25.5 avaruus

Perusryhmä ei Abelin ryhmä: $\alpha'\beta' \not\sim \beta'\alpha'$.

Toruksen tapauksessa $\alpha\beta \sim \beta\alpha$.
Esimerkin 25.5 avaruuden perusryhmä on $\cong$ n.s. kahden alkion virittämän vapaan ryhmän kanssa, kun taas $\pi(T^2) \cong$ n.s. kahden alkion virittämän vapaan Abelin ryhmän kanssa.

Esim. 1.7. Projektiivinen avaruus $\mathbb{RP}^n$, $n \geq 1$

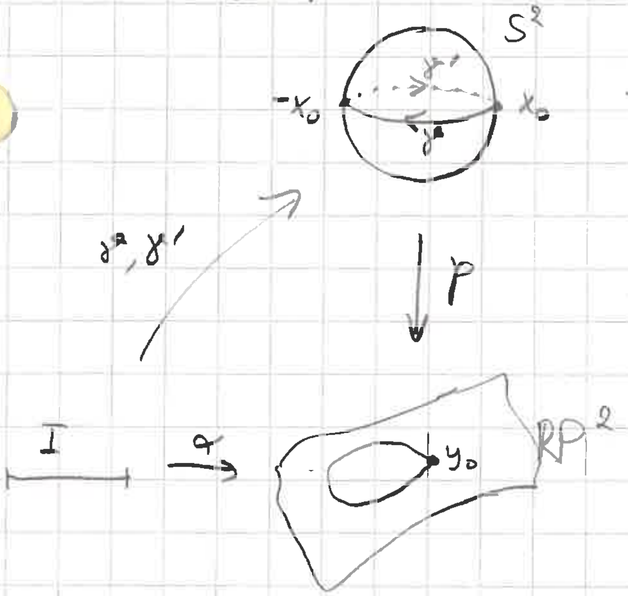
Kts. Väisälä: Esim. 9.5.;
n-pallolla S^n määr. ekvivalenssirelaatio R, jonka luokat ovat kaksiot $\{x, -x\}$, $x \in S^n$. Tekijäavaruus $\mathbb{RP}^n = S^n/R$ on *n-ulotteinen projektiivinen avaruus*. Merk. $p: S^n \to \mathbb{RP}^n$ projektio, joka on peitekuvaus (HT).

Huom. arvolla $n=1$ on $\mathbb{RP}^1 \approx S^1$.
Olk. nyt $n \geq 2$.
Olk. $y_0 \in \mathbb{RP}^n$.
Koska S^n on yhdesti yhtenäinen (Lause 1.5.), antaa V: Lause 24.9. bijektion $\pi(\mathbb{RP}^n, y_0) \to p^{-1}\{y_0\}$, joka on kahden alkion joukko.
Koska jokainen kahden alkion ryhmä on $\cong (\mathbb{Z}_2, +)$, on siis

$$\pi(\mathbb{RP}^n, y_0) \cong (\mathbb{Z}_2, +), \quad \text{kun } n \geq 2.$$

Siis avaruudessa $\mathbb{RP}^n$ on silmukka α, jolle $\alpha \not\simeq \varepsilon$, mutta $\alpha\alpha \simeq \varepsilon$ (yllättävää?).

Havainnollistus:



Olk. γ polku x_0:sta $-x_0$:aan ja γ' polku $-x_0$:sta x_0:aan kuten kuvassa; merk. $y_0 = p(x_0) = p(-x_0)$.

Määr. $\alpha = p \circ \gamma$. Koska $p(x_0) = p(-x_0)$, on α silmukka P^2:ssa.
Koska γ on α:n nosto ja ε_{x_0} on ε_{y_0}:n nosto ja $\gamma(1) \neq \varepsilon_{x_0}(1)$, on lauseen V: 24.7. nojalla $\alpha \not\simeq \varepsilon_{y_0}$.

Nyt $p \circ \gamma = p \circ \gamma'$, joten $p \circ (\gamma\gamma') = (p \circ \gamma)(p \circ \gamma') = \alpha\alpha$.
Toisaalta $\gamma\gamma' \simeq \varepsilon_{x_0}$, joten $\alpha\alpha \simeq \varepsilon_{y_0}$.