Henkivakuutusmatematiikka 22.1.2015

1. Olkoon vuosittain maksettavan takakäteisen annuiteettilainan vuosikorko i, lainan määrä L ja laina-aika n vuotta. Määrää koron osuus k. maksuerässä, $k = 1, 2 \ldots, n$.

2. Olkoon kuolevuus μ sellainen, että vastasyntyneen elinajan odotusarvo on äärellinen. Olkoon x-ikäisen jäljellä oleva elinaika $T(x)$ ja $e(x) = \mathbb{E}(T(x))$. Osoita, että

$$e'(x) = \mu(x)e(x) - 1$$

μ:n jatkuvuuspisteissä. Todista tuloksen avulla, että jos $e(x)$ ei riipu x:stä niin T on eksponentiaaliseti jakautunut.

3. Kahden hengen heti alkavassa eläkevakuutuksessa vakuutetut ovat x_1- ja x_2-ikäisiä. Eläkettä maksetaan jatkuvasti ja sen suuruus määräytyy seuraavasti. Jos molemmat ovat elossa, maksetaan kummallekin e euroa vuodessa. Jos vain x_j-ikäinen on elossa, maksetaan tälle f_j euroa vuodessa, $j = 1, 2$. Eläke lakkaa kokonaan, kun molemmat ovat kuolleet. Oletetaan, että vakuutettujen elinajat ovat riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrein μ_1 ja μ_2 (odotusarvot $1/\mu_1$ ja $1/\mu_2$). Olkoon korkoutuvuus δ positiivinen vakio. Osoita, että vakuutuksen nettokertamaksu P on

$$P = \frac{f_1}{\delta + \mu_1} + \frac{f_2}{\delta + \mu_2} + \frac{2e - f_1 - f_2}{\delta + \mu_1 + \mu_2}.$$

4. Ketamaksullisessa yhdistetyssä vakuutuksessa vakuutuskausi on n vuotta ja korvaussumma Q, jos vakuutettu elää hetkellä n. Jos vakuutettu kuolee hetkellä $t \in [0, n]$, maksetaan kuolinhetkellä korvaus $S(t)$, missä S on eräs jatkuva funktio välillä $[0, n]$. Olkoot korkoutuvuus δ ja kuolevuus μ jatkuvia positiivisia funktioita ja vakuutettu x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä nolla. Määrää korvausfunktio S siten, että elossa olevan vakuutetun vastuuvelka on vakio välillä $t \in (0, n)$. Mikä on tällöin vakuutuksen nettokertamaksu.

5. Olkoon kolmitilaisen Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Olkoot siirtymäintensiteetit μ_{12}, μ_{13} ja μ_{23} positiivisia vakioita ja muut nollia. Oletetaan, että

$$\mu_{23} - \mu_{12} - \mu_{13} \neq 0.$$

Vakuutettu on aktiivi sopimuksen tekohetkellä 0 ja saa työkyvyttömänä seuraavan n vuoden aikana jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun korkoutuvuus δ on positiivinen vakio.

Henkivakuutusmatematiikka 22.1.-15

1\. Erän summa on

$$A = \frac{(1-v)L}{v(1-v^n)}, \qquad v = \frac{1}{1+i}.$$

Lainan määrä (k-1). erän jälkeen on

$$L_{k-1} = a_{\overline{n-k+1|}} A = \frac{v(1-v^{n-k+1})}{1-v} A$$

Koron osuus k. erässä on

$$i L_{k-1} = \frac{i(1-v^{n-k+1})L}{1-v^n}$$

2\. Harj. 3, teht. 2.

3\.

Elossa	Eläke	
x_1, x_2	$2e$	$G_{x_1} + G_{x_2} + G_{x_1x_2} = 2e$
x_1	f_1	$G_{x_1} = f_1$
x_2	f_2	$G_{x_2} = f_2$

Siis $G_{x_1x_2} = 2e - f_1 - f_2$ ja

$$P = f_1 \bar{a}_{x_1} + f_2 \bar{a}_{x_2} + (2e - f_1 - f_2)\bar{a}_{x_1x_2},$$

$$\bar{a}_{x_1} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_{x_1}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu_1)t} dt = \frac{1}{\delta+\mu_1},$$

$$\bar{a}_{x_2} = \frac{1}{\delta+\mu_2},$$

$$\bar{a}_{x_1x_2} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_{x_1x_2}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu_1+\mu_2)t} dt = \frac{1}{\delta+\mu_1+\mu_2}.$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{f_1}{\delta+\mu_1} + \frac{f_2}{\delta+\mu_2} + \frac{2e - f_1 - f_2}{\delta+\mu_1+\mu_2}$$

4. Thielen yhtälö on

$$V'(t) = (\delta(t) + \mu(x+t))V(t) - \mu(x+t)S(t)$$

Jos $V(t)$ on vakio C, on

$$S(t) = \frac{\delta(t) + \mu(x+t)}{\mu(x+t)} C.$$

Koska $V(n-) = Q$, on $C = Q$. Nettokertamaksu on $V(0+) = C = Q$.

5. Nettokertamaksu on

$$P = S\int_0^n e^{-\delta t} P_{12}(0,t)\,dt$$

Merkitään lyhyesti $P_{1j}(0,t) = P_j(t)$. Forward-yhtälöt ovat

$$\begin{cases} P_1'(t) = -(\mu_{12}+\mu_{13})P_1(t), \\ P_2'(t) = \mu_{12}P_1(t) - \mu_{23}P_2(t) \end{cases}$$

Siis $\begin{cases} P_1(t) = C e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}. \text{ Koska } P_1(0)=1, \text{ on} \\ P_1(t) = e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} \end{cases}$

ja

$$P_2'(t) + \mu_{23}P_2(t) = e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}.$$

Ratkaisu on

$$P_2(t) = C e^{-\mu_{23}t} + \frac{e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}}{\mu_{23}-\mu_{12}-\mu_{13}}.$$

Koska $P_2(0) = 0$, on $C = -\frac{1}{\mu_{23}-\mu_{12}-\mu_{13}}$ ja

$$P = \frac{S}{\mu_{12}+\mu_{13}+\delta}\left[1 - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13}+\delta)n}\right] - \frac{S}{\mu_{23}+\delta}\left[1 - e^{-(\mu_{23}+\delta)n}\right].$$