Henkivakuutusmatematiikka 10.12.2014

1. Olkoon vuosittain maksettavan takakäteisen annuiteettilainan vuosikorko i, lainan määrä L ja laina-aika n vuotta. Osoita, että lyhennyksen osuus k. maksuerässä on

$$\frac{(1-v)v^{n-k}L}{1-v^n}, \quad k=1,\ldots,n,$$

missä $v=\frac{1}{1+i}$.

2. Oletetaan, että kuolevuus μ on jatkuva ja kasvava iän funktio. Olkoon x-ikäisen jäljellä oleva elinaika $T(x)$ ja $e(x)=\mathbb{E}(T(x))$. Osoita, että e on vähenevä iän funktio. Milloin e on iästä riippumaton vakio.

3. Elämänvaravakuutuksen vakuutuskausi on n vuotta ja korvaussumma S. Vakuutettu on sopimuksen tekohetkellä 0 x-ikäinen. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti koko vakuutuskauden ajan ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä. Hetkellä $n-1$ vakuutus muutetaan vapaakirjaksi (korvaussummaa muutetaan siten, että vakuutusmaksuja ei tarvitse enää maksaa). Määrää muutoksen jälkeinen korvaussumma, kun kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ ovat positiivisia vakioita.

4. Kuolemanvaravakuutuksen vakuutuskausi on n vuotta ja korvaussumma $S(t)$, jos vakuutettu kuolee hetkellä t. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti koko vakuutuskauden ajan vakiointensiteetillä $\bar{P}$. Olkoot korkoutuvuus δ ja kuolevuus μ jatkuvia funktioita. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Määrää $S(t), t\in[0,n]$, siten, että elossa olevan vakuutetun vastuuvelka on vakio koko vakuutuskauden ajan.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E=\{1,2,3,4\}$. Olkoot intensiteetit μ_{12},μ_{14}, μ_{21}, μ_{23}, μ_{24} ja μ_{34} positiivisia jatkuvia funktioita ja muut nollia. Korkoutuvuus δ on positiivinen jatkuva funktio. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = ohimenevästi työkyvytön, 3 = pysyvästi työkyvytön ja 4 = kuollut.

Vakuutettu on aktiivi sopimuksen tekohetkellä 0 ja on tehnyt seuraavan sopimuksen ajalle $[0,n]$. Vakuutettu saa jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S_2 tilassa 2 ja intensiteetillä S_3 tilassa 3. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ tilassa 1.

a) Esitä Thielen yhtälöt vastuuvelan määräämiseksi eri tiloissa.

b) Oletetaan, että vakuutettu on tilassa 3 hetkellä $t\in(0,n)$. Määrää vastuuvelka hetkellä t, kun δ ja μ_{34} ovat positiivisia vakioita.

Henkivakuutusmatematiikka 10.12.-14

1. Tasaerän summa A määräytyy ehdosta

$$A \sum_{k=1}^{n} v^k = L \quad \text{eli} \quad A = \frac{L(1-v)}{v(1-v^n)}$$

Lainan määrä k. erän suorittamisen jälkeen on

$$L_k = \sum_{j=1}^{n-k} v^j A = \frac{v(1-v^{n-k})}{1-v} A, \quad L_n = 0.$$

Lyhennys k. erässä on

$$L_{k-1} - L_k = \frac{v}{1-v}\left(-v^{n-k+1} + v^{n-k}\right) A$$

$$= \frac{v}{1-v} v^{n-k}(1-v) A = v^{n-k+1} A$$

$$= \frac{(1-v)v^{n-k}}{1-v^n} L.$$

2. Lause 3.1 ja Seuraus 3.2 $\Rightarrow$

$$e(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T(x) > t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)\,du}\, dt.$$

Jos $x_2 > x_1$, niin $\int_{x_1}^{x_1+t} \mu(u)\,du \leq \int_{x_2}^{x_2+t} \mu(u)\,du$,

joten $e(x_1) \geq e(x_2)$. Lisäksi

$$\int_{x_1}^{x_1+t} \mu(u)\,du = \int_{x_2}^{x_2+t} \mu(u)\,du, \quad \forall\, x_2 > x_1$$

$\Leftrightarrow$ μ on vakio i. T on eksp. jakautunut

3. Maksiminettopreemio $\bar{P}$ määräytyy ehdosta

$$\begin{cases} \bar{P}\, \bar{a}_{x:\overline{n}|} = S\, e^{-(\delta+\mu)n}, \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-(\delta+\mu)t}\, dt = \frac{1}{\delta+\mu}\left(1 - e^{-(\delta+\mu)n}\right). \end{cases}$$

Hetkellä $n-1$ vastuuvelka on

$$S\, e^{-(\delta+\mu)} - \bar{P}\, \bar{a}_{x+n-1:\overline{1}|}$$

$$= S\, e^{-(\delta+\mu)} - \bar{P} \cdot \frac{1}{\delta+\mu}\left(1 - e^{-(\delta+\mu)}\right)$$

Tämän on oltava $S'\, e^{-(\delta+\mu)}$, siis

$$S' = S - \bar{P} \cdot \frac{1}{\delta+\mu}\left(e^{\delta+\mu} - 1\right)$$

$$= S - S e^{-(\delta+\mu)n} \cdot \frac{e^{\delta+\mu} - 1}{1 - e^{-(\delta+\mu)n}}$$

$$= S\left(1 - \frac{e^{\delta+\mu} - 1}{e^{(\delta+\mu)n} - 1}\right).$$

4. Thielen yhtälö on

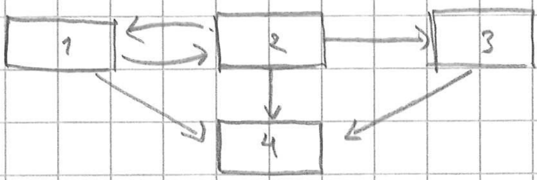
$$V'(t) = (\delta(t) + \mu(x+t))\, V(t) - \mu(x+t)\, S(t) + \bar{P},$$

oltava siis $0 = (\delta(t) + \mu(x+t))\, G - \mu(x+t)\, S(t) + \bar{P}$.

Koska $V(n-) = V(0+) = 0$, on $G = 0$ ja

$$S(t) = \frac{\bar{P}}{\mu(x+t)}.$$

5.



$$\begin{cases} V_4(t) = 0, \\ V_1'(t) = \delta(t)V_1(t) + \mu_{12}(t)\big(V_1(t)-V_2(t)\big) + \mu_{14}(t)\big(V_1(t)-V_4(t)\big) + \bar{P} \\ V_2'(t) = \delta(t)V_2(t) + \mu_{23}(t)\big(V_2(t)-V_3(t)\big) + \mu_{21}(t)\big(V_2(t)-V_1(t)\big) \\ \qquad\qquad + \mu_{24}(t)\big(V_2(t)-V_4(t)\big) - \bar{S}_2 \\ V_3'(t) = \delta(t)V_3(t) + \mu_{34}(t)\big(V_3(t)-V_4(t)\big) - \bar{S}_3 \end{cases}$$

Jus $\delta(t) = \delta$, $\mu_{34}(t) = \mu_{34}$, nin

$$V_3'(t) = \delta V_3(t) + \mu_{34} V_3(t) - \bar{S}_3$$

$$\Rightarrow V_3(t) = C e^{(\delta+\mu_{34})t} + \frac{\bar{S}_3}{\delta+\mu_{34}}$$

$$V_3(n) = 0 \Rightarrow C = -e^{-(\delta+\mu_{34})n} \cdot \frac{\bar{S}_3}{\delta+\mu_{34}}$$

$$V_3(t) = \frac{\bar{S}_3}{\delta+\mu_{34}}\left[1 - e^{(\delta+\mu_{34})(t-n)}\right].$$