Henkivakuutusmatematiikka
Syksy 2014

Harri Nyrhinen, Helsingin yliopisto

Sisältö

1 Johdanto

Henkivakuutukset ovat tyypillisesti pitkäaikaisia sopimuksia, joissa *vakuutusyhtiön korvaukset* riippuvat *vakuutetun* jäljellä olevasta elinajasta. Esimerkiksi vakuutusyhtiö maksaa sovitun summan, mikäli vakuutettu on elossa 65-vuotiaana. Vastikkeena vakuutettu maksaa yhtiölle yhden tai useampia *vakuutusmaksuja*. Sopimus voi hyvin olla esimerkiksi 20 vuoden pituinen.

Peruselementtinä henkivakuutuksessa voidaan pitää mainittua jäljellä olevaa elinaikaa. Tämä on luontevaa ajatella satunnaismuuttujaksi. Vakuutusmaksun mitoituksessa jäljellä olevan elinajan jakauman tunteminen on keskeisessä asemassa. Toinen oleellinen tekijä on sijoitustoiminnan tuotto. Henkivakuutukselle on nimittäin tyypillistä, että vakuutusmaksut kerätään etupainoitteisesti suhteessa odotettavissa oleviin korvauksiin. Erotukselle on saatavissa tuottoja sijoitustoiminnasta, millä on alentava vaikutus vakuutusmaksuihin. Mainitusta etupainoitteisuudesta johtuen yhtiö on yleensä velkaa vakuutuksenottajalle. Tätä erää kutsutaan *vastuuvelaksi*. Erä on usein mittava.

Kurssin sisältö muodostuu edellä esitettyjen jäljellä olevan elinajan, vakuutusmaksujen ja vastuuvelan analysoimisesta. Finanssimatematiikkaa tarkastellaan lähinnä deterministisen koron ympäristössä silmällä pitäen muiden osa-alueiden tarpeita. Päälähde on Pesonen, M., Soininen, P. ja Tuominen, T.: *Henkivakuutusmatematiikka*, Suomen vakuutusalan koulutus ja kustannus Oy (2014), 3. painos.

2 Korkolaskentaa

Tarkastellaan yksinkertaista esimerkkiä, jossa henkilö saa vuodeksi lainaa C euroa. Vuoden kuluttua hän joutuu maksamaan lainan takaisin ja tavallisesti myös korot.

Vuoden päästä tapahtuva takaisinmaksu (korkoineen) on siis yleensä suurempi kuin alkuperäinen lainan määrä. Lainan ottaminen voi kuitenkin olla edullista esimerkiksi seuraavista syistä:

– lainanottaja pystyy parantamaan välittömästi elintasoaan esimerkiksi hankkimalla puhelimen saamallaan lainalla. Toinen vaihtoehto olisi säästää C euroa ja hankkia puhelin, kun summa on koossa.

– lainanottaja pystyy sijoittamaan saamansa rahamäärän ja saa tuottoja, jotka riittävät myös korkoihin, mahdollisesti muuhunkin. Kyseessä voisi olla esimerkiksi yritystoiminnan tueksi hankittu tietokone.

Toisaalta lainanantajalla on useita motiiveja vaatia positiivista korkoa. Esimerkiksi:

– lainanottaja ei varmuudella pysty maksamaan lainaa takaisin (lainaan liittyy *luottotappioriski*).

– inflaatio kutistaa rahan arvoa. Vuoden kuluttua samalla rahamäärällä saa vähemmän 'hyödykkeitä' kuin nyt. Koroton laina olisi siis tappiollista lainanantajalle.

– pääomalle voi yleisesti vaatia normaalia talouden kasvua vastaavan tuoton. Voidaan ajatella, että rahamäärä on sijoitettavissa talouselämään siten, että tämä toteutuu. Samaa voidaan edellyttää lainalta.

Esitetyt seikat osoittavat, että positiivisen koron esiintyminen rahamarkkinoilla on perusteltua ja hyväksyttävissä molempien osapuolien näkökulmasta. Voidaan ajatella, että korko on hinta siitä, että lainanantaja luovuttaa pääoman lainanottajan käyttöön määräajaksi.

Absoluuttinen koron määrä riippuu yleensä lainan määrästä, laina-ajasta ja korkotasosta. Ellei erikseen mainita, tulee korkotaso olemaan jatkossa deterministinen.

2.1 Kiinteän koron mallit

Tässä kappaleessa oletetaan koko ajan, että markkinoita ohjaa yksi kiinteä korko $i > 0$. Tällä tarkoitetaan *vuosikorkoa*: jos hetkellä nolla tehdään talletus $C = C(0)$ pankkiin, niin hetkellä yksi on nostettavissa määrä

$$C(1) = (1 + i)C.$$

Kaikkien muiden talletusten (ja lainojen) käsittely perustuu tähän jonkin koronlaskuperiaatteen mukaisesti.

Yksinkertaisen koron -periaatteen mukaan hetkellä nolla t vuodeksi tehtävä talletus C antaa tallettajalle määrän

$$C(t) = (1 + it)C$$

hetkellä t. *Koron määrä* on

$$C(t) - C = itC,$$

joka on siis lineaarinen ajan funktio. Periaatteen soveltaminen johtaa helposti yhteensopivuusongelmiin, kuten jatkossa todetaan. Lyhyellä aikavälillä periaatteella on kuitenkin merkitystä.

Korkoa korolle -periaatteen mukaan

$$C(t) = (1 + i)^t C.$$

Jatkossa käsitellään lähinnä tätä periaatetta. Käytännössä esiintyy myös sekamuotoja. Esimerkiksi kokonaisille vuosille käytetään korkoa korolle -periaatetta ja osavuosille yksinkertaista korkoa. Tällöin

$$C(t) = (1 + i)^{\lfloor t \rfloor}(1 + i(t - \lfloor t \rfloor))C,$$

missä $\lfloor t \rfloor$ on t:n kokonaisosa.

Luonnollinen ajatus korkoa korolle -periaatteessa on, että kertyneet korot liitetään alkuperäiseen rahasummaan, minkä jälkeen myös niille karttuu korkoa.

Idealisoidussa ympäristössä korkoa korolle -periaatetta voidaan perustella seuraavasti. Tarkastellaan 'kehittyneitä' markkinoita, joilla lainaa on saatavissa ja annettavissa haluttu määrä halutulle ajalle ilman sivukuluja (käsittelykulut, verot jne.). Koron laskennasta oletetaan, että mielivaltaisella hetkellä t tehtävä talletus $C(t)$ kasvaa korkoa hetkeen $t + h$ mennessä siten, että tällöin on nostettavissa määrä

$$C(t + h) = r(h)C(t),$$

missä $h > 0$ ja $r(h)$ on talletusaikaan h liittyvä *korkokerroin*. Oletetaan siis, että $r(h)$ ei riipu talletushetkestä t eikä talletettavasta määrästä. Rahan lainaaminen pankista oletetaan mahdolliseksi käyttäen samoja korkokertoimia. Alkuperäisin merkinnöin $r(1) = 1 + i$.

Pyritään määräämään $r \doteq r(1/2)$.

a) Oletetaan, että olisi $r > (1 + i)^{1/2}$. Suoritetaan seuraavat operaatiot:

- a1) Otetaan pankista vuodeksi lainaa C euroa hetkellä 0.
- a2) Annetaan C edelleen lainaksi puoleksi vuodeksi hetkellä 0.
- a3) Hetkellä 1/2 saadaan a2:n lainasta summa rC. Annetaan summa saman tien lainaksi puoleksi vuodeksi.
- a4) Hetkellä 1 saadaan a3:n lainasta summa r^2C.

Koska $r^2C > (1+i)C$, pystytään a1:n pankkilaina maksamaan hetkellä 1. 'Ylimääräistä' rahaa jää
$$[r^2 - (1+i)]C.$$
Operaation suorittaja on pystynyt tekemään tyhjästä rahaa. Tällaista mahdollisuutta kutsutaan *arbitraasiksi* (yleisemmin: arbitraasimahdollisuus tarkoittaa, että sopivilla operaatioilla saa voittoa positiivisella todennäköisyydellä, mutta tappion todennäköisyys on nolla). Kasvattamalla C:tä nähdään, että ylimääräistä rahaa voidaan tehdä rajattomasti.

Yleisesti ajatellaan, että arbitraasia ei voi kehittyneillä markkinoilla esiintyä. Mikäli tällainen mahdollisuus syntyy, markkinoiden uskotaan korjaavan sen nopeasti. Jotta arbitraasimahdollisuutta ei olisi, tulee olla $r \leq (1+i)^{1/2}$.

b) Oletetaan, että olisi $r < (1+i)^{1/2}$. Suoritetaan seuraavat operaatiot:

b1) Otetaan pankista 1/2 vuodeksi lainaa C euroa hetkellä 0.

b2) Annetaan C edelleen lainaksi vuodeksi hetkellä 0.

b3) Otetaan hetkellä 1/2 lainaa rC euroa puoleksi vuodeksi. Tällä maksetaan kohdan b1 pankkilaina korkoineen.

b4) Hetkellä 1 saadaan kohdan b2 lainasta määrä $(1+i)C$. Tämä riittää kohdan b3 lainan hoitamiseen, sillä maksettava määrä on r^2C ja oletuksen mukaan
$$(1+i)C > r^2C.$$

Tässäkin tapauksessa pystytään tekemään tyhjästä rahaa, nimittäin määrä
$$[(1+i) - r^2]C.$$

Siis on oltava $r \geq (1+i)^{1/2}$ eli kaikkiaan
$$r = (1+i)^{1/2}.$$

Tämä on juuri korkoa korolle periaatteen mukainen kerroin puolen vuoden lainalle (tai talletukselle).

Ilmeistä on, että edellä esitetty päättely yleistyy mielivaltaiselle kertoimelle $r(1/m)$, missä $m \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen
$$C(1/m) = (1+i)^{1/m}C.$$

Lähtien tästä päätellään samoin, että

$$C(t) = (1+i)^tC, \tag{2.1}$$

kun $t \geq 0$ on mielivaltainen rationaaliluku. Vaatimalla vielä, että $C(t)$ on kasvava t:n suhteen todetaan, että kaava (2.1) pätee kaikilla $t \geq 0$.

Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan $1/m$ vuoden mittaisen ajanjakson korkoa. Korkoa korolle -periaatteen mukaan korkokerroin on

$$(1+i)^{1/m}$$

eli

$$C(1/m) = (1+i)^{1/m} C.$$

Esitetään tämä yksinkertaisen koron tapaan muodossa

$$1 + \frac{i^{(m)}}{m} = (1+i)^{1/m}. \tag{2.2}$$

Suuretta $i^{(m)}$ kutsutaan m. osavuoden *nimelliskoroksi.* Kyseinen nimelliskorko on luonnollinen peruselementti markkinoilla, joilla pienin kyseeseen tuleva aikayksikkö on $1/m$. Raja-arvoa

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)} \tag{2.3}$$

kutsutaan *jatkuvaksi koroksi* tai *korkoutuvuudeksi.* Intuitiivisesti korkoa liitetään pääomaan joka hetki määrä $C(t)\delta dt$. Tällöin

$$C(t+dt) - C(t) = C(t)\delta dt \tag{2.4}$$

eli $C'(t) = \delta C(t)$. Ratkaisu on $C(t) = Ce^{\delta t}$, kun alkuehtona vaaditaan, että $C(0) = C$. Yhteyden (2.2) nojalla $C(1) = (1+i)C$, joten

$$1 + i = e^{\delta}. \tag{2.5}$$

Tämä voidaan tietenkin todeta täsmällisesti lähtien esityksestä (2.2).

Edellä on tarkasteltu rahamäärän muuttumista ajan myötä annetussa korkoympäristössä. Kumuloimista tulevaisuuden ajanhetkeen kutsutaan *korkouttamiseksi.* Samaa termiä käytetään rahavirtojen kumuloimisesta. Näitä tarkastellaan lähemmin myöhemmin. Käänteistä operaatiota kutsutaan *diskonttaamiseksi.* Hetkellä t tapahtuvan rahasuorituksen $C(t)$ arvo diskontattuna hetkeen $s < t$ on

$$C(s) = C(t)e^{-\delta(t-s)}.$$

Olkoon v *yhden vuoden diskonttaustekijä,*

$$v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}.$$

Tällöin $C(s) = C(t)e^{-\delta(t-s)} = C(t)v^{t-s}$.

Nykyhetkeen $s = 0$ diskontattua arvoa kutsutaan *nykyarvoksi.* Nykyarvo on siis

$$C(0) = C(t)e^{-\delta t} = C(t)v^t.$$

2.2 Lainoista

Yksittäisten rahamäärien lisäksi on usein tarpeen tarkastella *rahavirtoja* tai *kassavirtoja.* Tyypillinen esimerkki on laina, joka maksetaan takaisin sovitun *maksuohjelman* mukaisesti. Yleensä lainasopimukseen sisältyy käytettavä vuosikorko tai vastaava, mahdollisesti myös periaatteet, joilla maksuohjelmaa tai korkoa voidaan muuttaa.

Tässä kappaleessa tarkastellaan seuraavaa sopimusta:

– lainanantaja luovuttaa hetkellä 0 lainanottajan käyttöön rahamäärän $L > 0$

– lainanottaja maksaa lainanantajalle erät $B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n) > 0$ ajanhetkinä $t_1, \ldots, t_n$, missä $0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Lisäksi oletetaan, että lainaan sovelletaan korkoa korolle -periaatetta ja että vuosikorko on kiinteä $i > 0$.

Usein maksuhetket $t_1, \ldots, t_n$ ovat tasavälisiä, mutta tässä oletusta ei tehdä. Ilmeisesti kassavirta $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ ei voi olla mitä tahansa. Sitä säätelevät mainitut koron laskennan oletukset. Lainanantajan vaatimus on, että kassavirtoihin sisältyy sopimuksen mukainen korko ja että laina on maksettu takaisin hetkellä t_n.

Kassavirran $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ *hetkeen t diskontattu arvo* määritellään ehdosta

$$C(t) = \sum_{j=1}^{n} v^{t_j - t} B(t_j), \quad v = \frac{1}{1+i}.$$

Erityisesti $C(0)$ on kassavirran *nykyarvo*. Kassavirtoja kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on samat nykyarvot. Selvästi kassavirtojen ekvivalenttisuus on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmää valaisee seuraava tarkastelu. Olkoot $B_1(t_1), \ldots, B_1(t_n)$ ja $B_2(u_1), \ldots, B_2(u_m)$ ekvivalentteja kassavirtoja ja $T = \max(t_n, u_m)$. Oletetaan, että ensimmäisen kassavirran saaja voi tallettaa saamansa rahat pankkiin ja saa korkoa kuten edellä. Hetkellä T on erä $B_1(t_1)$ kasvanut määräksi

$$(1+i)^{T-t_1} B_1(t_1).$$

Sama pätee muihin eriin, joten henkilön varallisuus hetkellä T on

$$\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{T-t_j} B_1(t_j) = (1+i)^T \sum_{j=1}^{n} v^{t_j} B_1(t_j) = (1+i)^T C_1,$$

missä C_1 on ensimmäisen kassavirran nykyarvo. Toisen kassavirran saajan varallisuus on vastaavasti hetkellä T

$$(1+i)^T C_2,$$

missä C_2 on kyseisen kassavirran nykyarvo. Ekvivalenteille kassavirroille $C_1 = C_2$, joten varallisuus hetkellä T on sama kummassakin tapauksessa. Kassavirrat poikkeavat toisistaan oleellisesti ottaen siten, että hallussa olevat rahamäärät eroavat aikavälillä $(0, T)$.

Johdetaan seuraavassa yhteys lainan määrän ja kassavirran $B(t_1), \dots, B(t_n)$ välille lähtien vaatimuksesta, että lainanantaja haluaa 'ulkona olevalle' rahalle vuosikoron i ja että laina maksetaan takaisin. Tarkastellaan siis kappaleen alussa esitettyä lainaa. Määritellään *lainan määrä* L_k heti suorituksen $B(t_k)$ jälkeen ehdoista

$$\begin{cases} L_0 &= L, \\ L_k &= L_{k-1} - \big(B(t_k) - I_k\big), \; k = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{2.6}$$

missä

$$I_k = \big((1+i)^{t_k - t_{k-1}} - 1\big) L_{k-1} \qquad (t_0 = 0) \tag{2.7}$$

on *koron osuus* suorituksessa $B(t_k)$. Vastaavasti $B(t_k) - I_k$ on *lyhennyksen osuus*. Nimitykset ovat luonnollisia tarkasteltavassa korkoympäristössä. Esimerkiksi välillä $(0, t_1)$ lainanantajalle syntyy mallissa oikeus korkoon

$$\big((1+i)^{t_1} - 1\big) L = I_1,$$

koska lainanottaja on saanut käyttöönsä rahamäärän L kyseiseksi ajaksi. Suorituksesta $B(t_1)$ osa I_1 menee siis korkoihin ja $B(t_1) - I_1$ on käytettävissä lyhennykseen. Lainan määräksi jää

$$L - \big(B(t_1) - I_1\big) = L_1.$$

Samaan päädytään ajattelemalla, että hetkellä t_1- lainansaaja on velkaa itse asiassa määrän

$$(1+i)^{t_1} L.$$

Tästä maksetaan hetkellä t_1 osa $B(t_1)$, jolloin velkaa jää määrä

$$(1+i)^{t_1} L - B(t_1) = L_1.$$

Suorituksen $B(t_1)$ jälkeen jatketaan samalla periaatteella, lainan määrä vain on nyt L_1 ja se saadaan käyttöön hetkellä t_1.

Lainanantaja edellyttää, että korkojen lisäksi laina on maksettava takaisin. Toisin sanoen on oltava $L_n = 0$. Kaavojen (2.6) ja (2.7) nojalla

$$\begin{aligned} 0 = L_n &= L_{n-1} - \big(B(t_n) - I_n\big) \\ &= L_{n-1} - \Big(B(t_n) - \big((1+i)^{t_n - t_{n-1}} - 1\big) L_{n-1}\Big) \\ &= (1+i)^{t_n - t_{n-1}} L_{n-1} - B(t_n) \\ &= (1+i)^{t_n - t_{n-1}} \big[L_{n-2} - \big(B(t_{n-1}) - I_{n-1}\big)\big] - B(t_n) \\ &= (1+i)^{t_n - t_{n-1}} \big[(1+i)^{t_{n-1} - t_{n-2}} L_{n-2} - B(t_{n-1})\big] - B(t_n) \\ &= (1+i)^{t_n - t_{n-2}} L_{n-2} - (1+i)^{t_n - t_{n-1}} B(t_{n-1}) - B(t_n) \\ &= \dots \\ &= (1+i)^{t_n} L - \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{t_n - t_j} B(t_j). \end{aligned}$$

Nähdään, että

$$L = \sum_{j=1}^{n} v^{t_j} B(t_j). \tag{2.8}$$

Oikealla puolella on kassavirran $B(t_1), \dots, B(t_n)$ nykyarvo. Sopimuksen korkovaatimus siis edellyttää, että maksuohjelman mukainen kassavirta on ekvivalentti hetkellä nolla tapahtuvan suorituksen L kanssa.

Saatu tulos voidaan myös kääntää. Olkoon nimittäin $B(t_1), \dots, B(t_n)$ yhtälön (2.8) toteuttava kassavirta. Määritellään lainan määrä suorituksen $B(t_k)$ jälkeen kaavalla (2.6). Tällöin $L_n = 0$ eli lainanantaja saa 'ulkona olevalle' rahalle asianmukaisen koron ja laina tulee loppuun maksetuksi erän $B(t_n)$ jälkeen. Nimittäin edellä johdettu esitys

$$L_n = (1+i)^{t_n} L - \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{t_n - t_j} B(t_j)$$

seuraa L_k:n määritelmästä. Jos siis (2.8) toteutuu, niin $L_n = 0$.

Edellä esitetty päättely johti lainamäärän ja maksuohjelman väliseen yhteyteen, kun korkotaso on kiinnitetty. Rekursio antaa myös menetelmän velan laskemiseksi hetkellä t_k. Samoin saatiin koron osuus suorituksista $B(t_k)$ (ainakin, jos $B(t_k)$ riittää korkoihin niinkuin yleensä edellytetään). Yksinkertainen tapa määrätä velan määrä saadaan seuraavassa.

Lause 2.1. *Olkoon vuosikorko $i > 0$, lainamäärä L ja $B(t_1), \dots, B(t_n)$ lainan takaisinmaksuohjelma. Silloin k. suorituksen jälkeen (hetkellä t_k+) velan määrä on*

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{n} v^{t_j - t_k} B(t_j), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.9}$$

Lauseen tulos on luonnollinen, sillä L_k on jäljellä olevien suoritusten nykyarvo hetkellä t_k. Tulevat kassavirrat ovat ekvivalentteja 'nyt' tapahtuvan kassavirran L_k kanssa.

Todistus. Rekursion (2.6) nojalla

$$L_k = (1+i)^{t_k - t_{k-1}} L_{k-1} - B(t_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Edellä jo todettiin, että $L_n = 0$, joten

$$L_{n-1} = v^{t_n - t_{n-1}} B(t_n).$$

Siis (2.9) pätee, kun $k = n - 1$.

Jos (2.9) pätee indeksillä k, niin (2.6) antaa

$$\begin{aligned} L_{k-1} &= v^{t_k - t_{k-1}} B(t_k) + v^{t_k - t_{k-1}} L_k \\ &= v^{t_k - t_{k-1}} B(t_k) + v^{t_k - t_{k-1}} \sum_{j=k+1}^{n} v^{t_j - t_k} B(t_j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} v^{t_j - t_{k-1}} B(t_j). \end{aligned}$$

Tämä on (2.9) indeksillä $k - 1$, joten lauseen väite seuraa induktioperiaatteesta. □

Lauseen 2.1 esitystä velan määrälle kutsutaan *prospektiiviseksi* laskentatavaksi. Se on tulevaisuuteen katsova. *Retrospektiivinen* laskenta perustuu alkuperäiseen lainamäärään ja tarkasteluhetkeen mennessä tapahtuneisiin kassavirtoihin.

Lause 2.2. *Lauseen 2.1 oletuksin*

$$L_k = (1+i)^{t_k} L - \sum_{j=1}^{k} (1+i)^{t_k - t_j} B(t_j),$$

$k = 1, \ldots, n$.

Ylläolevan kaavan mukaan jäljellä oleva lainamäärä saadaan ensinnäkin korkouttamalla L tarkasteluhetkeen. Vähentävänä tekijänä otetaan huomioon toteutunut kassavirta korkoutettuna samaan hetkeen. Retrospektiivinen laskentatapa yhtyy prospektiiviseen oleellisesti ottaen siksi, että kassavirran $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ 'mitoituksessa' sovelletaan *ekvivalenssiperiaatetta*: kyseessä oleva kassavirta on ekvivalentti nyt tapahtuvan suorituksen L kanssa.

Todistus. Aiemmin on jo todistettu, että $L = \sum_{j=1}^{n} v^{t_j} B(t_j)$. Lauseen 2.1 nojalla

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_{j=k+1}^{n} v^{t_j - t_k} B(t_j) = v^{-t_k} \left(L - \sum_{j=1}^{k} v^{t_j} B(t_j) \right) \\ &= (1+i)^{t_k} L - \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{t_k - t_j} B(t_j). \end{aligned}$$

□

Seuraavissa esimerkeissä oletetaan, että laina-aika on n ja että maksuhetket ovat

$$t_k = k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Lainan määrä myöntämishetkellä on L.

Esimerkki 1. (*Tasalyhenteinen laina*). Erä $B(k)$ muodostuu kiinteästä lyhennyksestä $T = L/n$ ja yhden vuoden korosta jäljellä olevalle lainamäärälle. Siis

$$L_{k-1} = L - (k-1)T, \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

Täten

$$B(k) = \frac{L}{n} + i\left(L - \frac{(k-1)L}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + i\frac{n-k+1}{n}\right)L.$$

Koska $B(k)$ muodostuu L:ään riittävistä lyhennyksistä ja asianmukaisesta korosta, on kassavirran nykyarvo L.

Esimerkki 2. (*Annuiteettilaina*). Erä $B(k) = B = vakio$ kaikilla k. Menettely on tavallinen ja analogisia rakenteita esiintyy myöhemmin esitettävissä vakuutuksellisissa sovelluksissa. Standarditerminologian mukaan

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} \doteq 1 + v + \ldots + v^{n-1} = n\text{-}vuotisen\ etukäteisen\ yksikköannuiteetin\ nykyarvo$$

(tämä vastaa kassavirtaa $B(0) = B(1) = \ldots = B(n-1) = 1$)

$$a_{\overline{n}|} \doteq v + v^2 + \ldots + v^n = n\text{-}vuotisen\ takakäteisen\ yksikköannuiteetin\ nykyarvo$$

(tämä vastaa kassavirtaa $B(1) = \ldots = B(n) = 1$).
Siis

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} \quad \text{ja} \quad a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{1-v}.$$

Annuiteettilainalle pätee

$$L = a_{\overline{n}|}\, B \quad \text{eli} \quad B = \frac{L}{a_{\overline{n}|}}.$$

Lainan määrä k. erän suorituksen jälkeen on lauseen 2.1 nojalla

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{n} v^{j-k} B = a_{\overline{n-k}|} B.$$

Edelleen k. erä sisältää korkoa määrän

$$I_k = iL_{k-1} = ia_{\overline{n-k+1}|} B.$$

Laina voi olla myös ikuinen, jolloin $n = \infty$. Tällöin B sisältää vain koron ja lainan määrä säilyy L:nä ikuisesti.

2.3 Lainojen muuttamisesta

Lainat ovat toisinaan pitkäaikaisia, jolloin syntyy tarpeita muutoksiin. Esimerkiksi halutaan muuttaa laina-aikaa tai erien määrää.

Tarkastellaan kohdan 2.2 alussa esitettyä lainaa. Oletetaan, että hetkellä t_k erän $B(t_k)$ suorittamisen jälkeen halutaan muuttaa tuleva kassavirta $B(t_{k+1}), \ldots, B(t_n)$ uudeksi kassavirraksi $B'(u_{k+1}), \ldots, B'(u_m)$. Oletetaan, että korko on edelleen alkuperäinen i. Millainen pitää uuden kassavirran olla, että muutos olisi neutraali tuottotasoltaan?

Luonnollinen vastaus on, että jäljellä olevien kassavirtojen tulee olla ekvivalentit. Tällöin kyseisellä korkokannalla lainanantajalle kumuloituu sama rahamäärä kummassakin vaihtoehdossa. Kassavirtojen sovittamista ekvivalenteiksi tällä tavalla kutsutaan *ekvivalenssiperiaatteeksi.*

Asiaa voidaan valaista seuraavasti. Alkuperäisen kassavirran nykyarvo hetkellä t_k on sama kuin jäljellä oleva lainamäärä eli

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{n} v^{t_j - t_k} B(t_j) \tag{2.10}$$

(lause 2.1). Lainan määrä pysyy entisenä muutoksessa. Lainanantaja myöntäisi uuden lainan L_k uutta kassavirtaa vastaan hetkellä t_k, jos

$$L_k = \sum_{j=k+1}^{m} v^{u_j - t_k} B'(u_j). \tag{2.11}$$

Perusteltua on käsitellä lainaa samoin muutostilanteessa kuin uuden lainan myöntämisessä.

Korkotason muutos on hieman erilainen. Mikäli sopimuksen mukaan korkoa voidaan muuttaa, on se luonnollista tehdä samalla logiikalla eli lainamäärän tulee vastata uudella korolla diskontattua kassavirran nykyarvoa. Tällöin muutostilanne vastaa uuden lainan myöntämistä kuten edellä. Tätä menettelyä kutsutaan myös ekvivalenssiperiaatteeksi.

Esimerkki 1. Tarkastellaan kohdan 2.2 annuiteettiesimerkkiä k. vuoden lopussa k. erän suorittamisen jälkeen. Oletetaan, että lainanottaja haluaa muuttaa jäljellä olevan maksuajan $n-k$ vuodesta N:ksi. Annuiteettiominaisuus säilytetään (siis tulevat erät ovat tasasuuruisia). Määrätään tulevan erän suuruus B' ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti.

Kohdan 2.2 mukaan jäljellä oleva lainamäärä on $L_k = a_{\overline{n-k|}} B$. Tulevien kassavirtojen nykyarvo on $a_{\overline{N|}} B'$, joten saadaan vaatimus

$$a_{\overline{n-k|}} B = a_{\overline{N|}} B'$$

eli $B' = a_{\overline{n-k|}} B / a_{\overline{N|}}$.

Esimerkki 2. Olkoon laina kuten esimerkissä 1. Oletetaan, että korko muuttuu k. erän suorittamisen jälkeen siten, että uusi vuosikorko on i'. Määrätään asnnuiteetti tuleville vuosille ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Nyt jäljellä on $n-k$ suoritusta. Jos B' on uuden erän suuruus, niin vaatimus on

$$L_k = B' a'_{\overline{n-k}|},$$

missä $a'_{\overline{n-k}|}$ on korkoa i' vastaavan yksikköannuiteetin nykyarvo. Siis

$$B' = \frac{L_k}{a'_{\overline{n-k}|}} = \frac{a_{\overline{n-k}|}}{a'_{\overline{n-k}|}} B.$$

Esimerkki 3._(Bullet-laina)._ Oletetaan, että lainasta maksetaan vuosittain korot ja laina-ajan lopussa lyhennys kokonaisuudessaan. Kassavirta on siis

$$B(1) = iL, \ldots, B(n-1) = iL, B(n) = iL + L.$$

Oletetaan, että korko muuttuu i':ksi ja että jäljellä olevia suorituksia voidaan muuttaa ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Rakenne säilyttäen tulevat erät ovat

$$i'L, \ldots, i'L, i'L + L.$$

Joukkovelkakirjalainat ovat tyypillisesti sellaisia, että lainanottaja (esimerkiksi valtio) saa hetkellä nolla sijoittajalta lainan *nimellisarvon* ja palauttaa *kuponkikorkoja*, jotka ovat vakiosuuruisia. Laina-ajan päättyessä maksetaan lisäksi lainan nimellisarvo. Kassavirta on siis samantyyppinen kuin Bullet-lainassa. Implisiittisesti lainaan liittyy korko. Koronmuutoksia ei yleensä huomioida näissä, vaan kassavirta pysyy sovitunlaisena korkotason muutoksista huolimatta. Korkomuutokset näkyvät silloin velkakirjan markkina-arvossa (eli hinnassa, jolla haltija pystyy myymään velkakirjan). Korkotason nousu laskee markkina-arvoa, korkotason putoaminen nostaa. Joukkovelkakirjaan sisältyy siis riski, vaikka kassavirta onkin etukäteen kiinnitetty.

2.4 Investoinneista

Tarkastellaan investointia, jossa syntyy kassavirta

$$B(t_0),\ B(t_1),\ B(t_2), \ldots, B(t_n),\ 0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n.$$

Negatiivinen $B(t_j)$ tarkoittaa, että toimija sijoittaa rahojaan investointikohteeseen ja positiivinen, että investoinnista saadaan tuottoja. Kysytään, miten arvioidaan investoinnin tuottoa. Esimerkiksi lainan myöntäminen voidaan katsoa investoinniksi pankin näkökulmasta. Hetkellä 0 maksetaan laina ulos ja tulevina vuosina saadaan tuottoja korkojen ja lyhennysten muodossa. Annuiteetin tapauksessa kassavirta on ($t_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, n$)

$$-L, \underbrace{B, \ldots, B}_{\text{n kpl}},$$

missä L on lainan määrä ja B sovellettavaa korkoa vastaava erän suuruus. Yleisessä tapauksessa ulospäin lähteviä eriä voi olla useita.

Kassavirran nykyarvo annetulla korolla i on

$$C(0,i) = \sum_{j=0}^{n} v^{t_j} B(t_j). \tag{2.12}$$

Kassavirran *sisäinen korko* tai *effektiivinen korko* on sellainen reaaliluku $i^* > -1$, että

$$C(0,i^*) = 0, \tag{2.13}$$

mikäli tällainen on yksikäsitteisenä olemassa. Investointi, jonka sisäinen korko on i^*, on neutraali markkinoilla, joilla vallitseva korkotaso on i^* (lainaa voi ottaa tai antaa luvun 2 mukaisesti korolla i^*).

Esimerkki. Tarkastellaan kappaleen alussa esitettyä annuiteettia. Sisäinen korko määräytyy ehdosta

$$-L + \sum_{j=1}^{n} (v^*)^j B = 0, \qquad \text{missä } v^* = \frac{1}{1+i^*}.$$

Siis

$$\frac{v^*\big(1-(v^*)^n\big)}{1-v^*} = \frac{L}{B} = a_{\overline{n}|},$$

missä $a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{1-v}$ ja v vastaa lainan korkoa. Eräs ratkaisu on $v^* = v$. Seuraava lause osoittaa, että tämä on ainut positiivinen ratkaisu.

Lause 2.3. *Oletetaan, että $B(t_0) = B(0) < 0$ ja $B(t_n) > 0$. Silloin on olemassa $\bar{i} > -1$ siten, että $C(0,i) = 0$, kun $i = \bar{i}$. Olkoon*

$$\bar{v} = \frac{1}{1+\bar{i}}.$$

Jos lisäksi

$$\sum_{j=0}^{k} \bar{v}^{t_j} B(t_j) \le 0 \tag{2.14}$$

kaikilla $k = 0, 1, \ldots, n$, niin $C(0,i) > 0$, kun $i \in (-1,\bar{i})$ ja $C(0,i) < 0$, kun $i > \bar{i}$. Näin ollen $i = \bar{i}$ on yksikäsitteinen yhtälön $C(0,i) = 0$ ratkaisu alueessa $i \in (-1,\infty)$ ja siis $i^* = \bar{i}$ on investoinnin sisäinen korko.

Todistus. Oletuksen mukaan

$$\lim_{i\to -1+} C(0,i) = \lim_{i\to -1+} v^{t_n} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (1+i)^{t_n - t_j} B(t_j)}_{\to B(t_n)>0} = +\infty.$$

Toisaalta

$$\lim_{i\to\infty} C(0,i) = B(0) < 0.$$

Selvästi $C(0,\cdot)$ on jatkuva, joten vaadittu $\bar{i}$ on olemassa. Oletetaan, että lisäksi (2.14) toteutuu. Olkoon $i > \bar{i}$. tällöin

$$\begin{aligned}
C\left(0,\bar{i}\right) &= \sum_{j=0}^{n} \bar{v}^{t_j} B(t_j) = \bar{v}^{t_n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}^{t_j - t_n} B(t_j) + B(t_n) \right] \\
&= \bar{v}^{t_n} \left[\bar{v}^{t_{n-1}-t_n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}^{t_j - t_{n-1}} B(t_j) + B(t_n) \right] \\
&\geq \bar{v}^{t_n} \left[v^{t_{n-1}-t_n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}^{t_j - t_{n-1}} B(t_j) + B(t_n) \right] \\
&= \bar{v}^{t_n} \left[v^{t_{n-1}-t_n} \left(\bar{v}^{t_{n-2}-t_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{v}^{t_j - t_{n-2}} B(t_j) + B(t_{n-1}) \right) + B(t_n) \right] \\
&\geq \bar{v}^{t_n} \left[v^{t_{n-1}-t_n} \left(v^{t_{n-2}-t_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{v}^{t_j - t_{n-2}} B(t_j) + B(t_{n-1}) \right) + B(t_n) \right] \\
&= \bar{v}^{t_n} \left[v^{t_{n-2}-t_n} \sum_{j=0}^{n-2} \bar{v}^{t_j - t_{n-2}} B(t_j) + v^{t_{n-1}-t_n} B(t_{n-1}) + B(t_n) \right] \\
&\geq \ldots \geq \bar{v}^{t_n} \sum_{j=0}^{n} v^{t_j - t_n} B(t_j).
\end{aligned}$$

Erisuuruus on aito viimeisessä vaiheessa, koska $B(0) < 0$. Siis

$$0 = C\big(0,\bar{i}\big) > \bar{v}^{t_n} v^{-t_n} C\big(0,i\big),$$

joten $C\big(0,i\big) < 0$. Vastaavasti todetaan, että $C\big(0,i\big) > 0$, kun $i \in (-1,\bar{i})$. □

Seuraus 2.4. *Oletetaan, että*

$$B(t_0), B(t_1), \ldots, B(t_k) < 0 \quad \textit{ja} \quad B(t_{k+1}), \ldots, B(t_n) > 0$$

eräälle $k \in \{0,1,\ldots n-1\}$. Silloin sisäinen korko $i^* > -1$ on olemassa.

Todistus. Lauseen 2.3 alkuosan nojalla on olemassa $\bar{i} > -1$ siten, että

$$C\big(0,\bar{i}\big) = \sum_{j=0}^{n} \bar{v}^{t_j} B(t_j) = 0.$$

Selvästi tästä ja oletuksista seuraa (2.14). □

Tarkastellaan lähemmin seurauksen 2.4 tilannetta. Oletetaan, että sijoittaja maksaa erät

$$L(0),\ L(t_1), \ldots,\ L(t_k)$$

hetkinä $0, t_1, \ldots, t_k$ ja saa palautukset

$$P(t_{k+1}), \ldots,\ P(t_n)$$

hetkinä $t_{k+1}, \ldots, t_n$. Kaikki nämä oletetaan positiivisiksi. Kassavirta on

$$-L(0),\ -L(t_1), \ldots,\ -L(t_k),\ P(t_{k+1}), \ldots,\ P(t_n).$$

Sisäiselle korolle pätee

$$\sum_{j=0}^{k} (v^*)^{t_j} L(t_j) = \sum_{j=k+1}^{n} (v^*)^{t_j} P(t_j).$$

Maksut ja palautukset ovat siis ekvivalentteja sisäisellä korkokannalla laskettuna. Jos i on muuten markkinoilta saatavissa oleva korko ja $i^* > i$, on investointi kannattava verrattuna pankkitalletukseen. Nimittäin hetkellä t_n on varallisuus suurempi, jos investointi toteutetaan verrattuna siihen, että käytetään vain markkinoilla tarjolla olevia talletuksia ja lainoja (olettaen myös, että investointivaihtoehdossa palautukset $P(t_{k+1}), \ldots,\ P(t_n)$ siirretään aina i-korkoiselle tilille).

Ainakin peukalosääntönä investointeja vertailtaessa suurimman sisäisen koron antava on kannattavin. Asia ei kuitenkaan ole näin yksinkertainen erityisesti siinä tapauksessa, että saatavia tuottoja ei pystytä sijoittamaan uudelleen samanlaiseen kohteeseen. Sisäisen koron eräänä ongelmana on myös se, ettei sitä ole aina määritelty.

Toinen sijoituksen arvioinnissa käytettävä suure on *nettonykyarvo*. Oletetaan, että vallitseva korkotaso on i ja että rahaa on lainattavissa molempiin suuntiin tällä vuosikorolla. Tarkastellaan investointia $-L(0), \ldots,\ -L(t_k), P(t_{k+1}), \ldots,\ P(t_n)$ kuten edellä. Oletetaan, että rahat $L(0), \ldots,\ L(t_k)$ joudutaan lainaamaan mainitulla korolla i ja että toisaalta palautukset $P(t_{k+1}), \ldots,\ P(t_n)$ voidaan tallettaa samalla korolla. Tässä ympäristössä varallisuus hetkellä t_n on

$$-\sum_{j=0}^{k} (1+i)^{t_n - t_j} L(t_j) + \sum_{j=k+1}^{n} (1+i)^{t_n - t_j} P(t_j).$$

Jakamalla tämä $(1+i)^{t_n}$:llä saadaan investoinnin nettonykyarvo $N = N(i)$,

$$N(i) = \sum_{j=0}^{n} v^{t_j} B(t_j),$$

missä $B(t_j) = -L(t_j)$, $j = 0, \ldots, k$ ja $B(t_j) = P(t_j)$, $j > k$.

Mikäli kahta investointivaihtoehtoa arvioidaan loppuvarallisuuden perusteella, on parempi se, jolla on suurempi nettonykyarvo (jos molempien nettonykyarvot ovat negatiivisia, hylätään molemmat). Menettely on sisäisen koron vertailuun nähden yleisemmin toteutettavissa, koska nettonykyarvo on aina määritelty.

Todettakoon lopuksi, että investoinnit on edellä oletettu riskittömiksi eli esitettyjen kassavirtojen on oletettu toteutuvan varmasti.

Lisälähde kohtaan 2.4: IAFA (2000).

2.5 Jatkuvat kassavirrat

Toisinaan on mukavampi tarkastella kassavirtoja jatkuvina. Tällöin kyseessä on approksimaatio. Tämä saattaa vastata todellisuutta riittävän tarkasti esimerkiksi suuren vakuutusyhtiön tapauksessa, jossa kokonaisuus muodostuu summana monista yksittäisistä kassavirroista.

Tarkastellaan johdannoksi m kertaa vuodessa suoritettavaa yksikköannuiteettia. Oletetaan, että suorituksia tehdään n vuotta takakäteisesti. Kassavirta on

$$B(t_k) = \frac{1}{m},\ t_k = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, n.$$

Suoritusten kokonaismäärä vuodessa on siis yksi. Nykyarvo on

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{nm} v^{j/m} = \frac{1}{m} \frac{v^{1/m}(1-v^n)}{1-v^{1/m}} \doteq a_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

Kohdan 2.2 merkinnöin $a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$.

Annetaan m:n lähestyä ääretöntä. Intuitiivisesti saadaan jatkuva kassavirta, jossa hetkellä t tapahtuu suoritus $1 \cdot dt$ ja vuodessa suorituksia kertyy yhteensä määrä 1. Selvästi

$$\lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = -\frac{1-v^n}{\log v} = \frac{1-v^n}{\log(1+i)} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Tästä käytetään merkintää $\bar{a}_{\overline{n}|}$. Eroa etu- ja takakäteisen annuiteetin välillä ei tässä tarvitse tehdä. Myöskin n voi olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku ilman ongelmia viimeisen erän kanssa.

Jos laina L maksetaan takaisin m kertaa vuodessa maksettavana takakäteisenä annuiteettina, määräytyy erän suuruus B_m ehdosta

$$L = B_m a_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

Jos taas laina maksetaan takaisin jatkuvana annuiteettina, määräytyy *suoritusintensiteetti* $\bar{B}$ ehdosta

$$L = \bar{B}\bar{a}_{\overline{n}|}.$$

Tällöin $\lim_{m\to\infty} B_m = \bar{B}$. Intuitiivisesti hetkellä t maksetaan määrä $\bar{B}dt$.

Jatkuvan yksikköannuiteetin nykyarvoon päädytään myös seuraavasti. Hetkellä t tapahtuvan suorituksen $1 \cdot dt$ nykyarvo on $e^{-\delta t}dt$. Koko kassavirran nykyarvo saadaan 'summaamalla' nämä. Tulos on

$$\int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{n}|}.$$

2.5.1 Yleinen jatkuva kassavirta

Olkoon $b : [0, n] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio. *Jatkuva kassavirta intensiteetillä* b tarkoittaa sitä, että jokaisella välillä $(t_1, t_2) \subset [0, n]$ suoritusten kokonaismäärä on

$$\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt.$$

Intuitiivisesti, hetkellä t tapahtuu suoritus $b(t)dt$. Olkoon $\delta \geq 0$ korkoutuvuus. Kassavirran *nykyarvo* on

$$\int_0^n e^{-\delta t} b(t)dt.$$

Määritellään *toteutuneen kassavirran arvo* hetkellä $u \in (0, n)$ ehdosta

$$V(u) \doteq \int_0^u e^{\delta(u-s)} b(s)ds = e^{\delta u} \int_0^u e^{-\delta s} b(s)ds.$$

Jokainen suoritus $b(s)ds$ korkoutetaan siis hetkeen u. Jos b on jatkuva, niin

$$\begin{aligned} V'(u) &= \delta e^{\delta u} \int_0^u e^{-\delta s} b(s)ds + e^{\delta u} e^{-\delta u} b(u) \\ &= \delta V(u) + b(u). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lisäksi $V(0) = 0$, joten V voidaan ratkaista differentiaaliyhtälöstä (2.15).

Usein on hyödyllistä johtaa edellä esitetyn kaltaisia differentiaaliyhtälöitä tarkastelemalla toteutuneen kassavirran arvon dynamiikkaa. Hetkellä u kertyneen kassavirran arvo olkoon $V(u)$ (johon suhtaudutaan tuntemattomana funktiona). Lyhyellä välillä $[u, u + \Delta)$ arvoon tulee seuraavat likimääräiset lisäykset:

1. $b(u)\Delta$ eli suoritukset kyseessä olevalla välillä
2. $(e^{\delta\Delta}-1)V(u)$ eli korko kyseessä olevalla välillä.

Myös välillä $[u, u+\Delta)$ tulleisiin suorituksiin kuuluu laskea korko, mutta tämän määrä on $o(1)\Delta$, missä $o(1) \to 0$, kun $\Delta \to 0$. Koron osuus on

$$(e^{\delta\Delta}-1)V(u) = \delta V(u)\Delta + o(1)\Delta.$$

Siis arvon muutos on

$$V(u+\Delta) - V(u) = b(u)\Delta + \delta V(u)\Delta + o(1)\Delta,$$

joten

$$V'(u) = b(u) + \delta V(u),$$

kuten edellä saatiin derivoimalla.

2.5.2 Jatkuvamaksuiset lainat

Tarkastellaan hypoteettista lainaa, joka maksetaan takaisin jatkuvalla kassavirralla intensiteettinä b. Olkoon alkuperäinen lainan määrä L ja maksuaika n. Olkoon $L(t)$ lainan määrä hetkellä $t \in (0, n)$. Tällöin siis $L(0) = L$ ja lainanantaja vaatii, että $L(n) = 0$. Lyhyellä aikavälillä $[t, t+dt)$ lainanottaja maksaa määrän

$$b(t)dt,$$

josta korkoihin menee erä $L(t)\delta dt$. Lyhennys on siis

$$\big(b(t) - L(t)\delta\big)dt,$$

joten

$$L(t+dt) = L(t) - \big(b(t) - L(t)\delta\big)dt.$$

Siis

$$L'(t) = \delta L(t) - b(t). \tag{2.16}$$

Nyt

$$\frac{d}{dt}\big[e^{-\delta t}L(t)\big] = e^{-\delta t}\big(L'(t) - \delta L(t)\big).$$

Kertomalla (2.16) puolittain lausekkeella $e^{-\delta t}$ saadaan ratkaisuksi

$$e^{-\delta t}L(t) = A - \int_0^t e^{-\delta s}b(s)ds,$$

missä A on integroimisvakio. Siis

$$L(t) = Ae^{\delta t} - \int_0^t e^{\delta(t-s)} b(s) ds.$$

Koska $L(0) = L$, niin $A = L$. Lisäksi vaaditaan, että $L(n) = 0$, mikä johtaa yhtälöön

$$Le^{\delta n} - \int_0^n e^{\delta(n-s)} b(s) ds = 0$$

ja edelleen

$$L = \int_0^n e^{-\delta s} b(s) ds. \tag{2.17}$$

Vaatimus on siis, että lainan alkuperäinen määrä yhtyy maksuohjelman mukaisen kassavirran nykyarvoon. Tämä vastaa kaavaa (2.8). Vastaavasti edellä johdettu esitys

$$L(t) = Le^{\delta t} - \int_0^t e^{\delta(t-s)} b(s) ds \tag{2.18}$$

on retrospektiivisesti laskettu lainan määrä. Prospektiivinen laskutapa tulisi ilmeisesti olla

$$L(t) = \int_t^n e^{-\delta(s-t)} b(s) ds, \tag{2.19}$$

lauseita 2.1 ja 2.2 vastaten. Osoitetaan, että (2.18) ja (2.19) todella ovat samat. Tuloksen (2.17) nojalla

$$L = \int_0^t e^{-\delta s} b(s) ds + \int_t^n e^{-\delta s} b(s) ds,$$

joten

$$Le^{\delta t} = \int_0^t e^{\delta(t-s)} b(s) ds + \int_t^n e^{-\delta(s-t)} b(s) ds.$$

Nähdään, että (2.18) ja (2.19) yhtyvät.

2.6 Vaihtuva korko

Kiinteän koron oletusta voidaan pitää epärealistisena, mutta sillä on kuitenkin merkitystä esimerkiksi lainoissa. Perinteisessä henkivakuutuksessa on myös käytetty teknistä laskuperustekorkoa hinnoittelussa ja velkojen laskennassa. Tekniikkaa käytetään edelleen, mutta on perusteltua tarkastella muitakin tapoja.

Korkomarkkinoilla on yleensä useita vuosikorkoja eri mittaisille talletusajoille. Nämä kuvaavat nyt tehtävän talletuksen korkoja. Seuraavana päivänä korot ovat tavallisesti muuttuneet.

Tarkastellaan hieman yksinkertaisempaa tilannetta, jossa tulevaisuudessakin tehtävien talletusten korot tiedetään. Tämän kaltaiseen tilanteeseen päästään todellisuudessakin *etukäteisillä sopimuksilla*. Näitä ei tarkastella kurssilla.

Oletetaan, että hetkellä t tehtävä mielivaltainen talletus C kasvaa korkoa siten, että hetkellä $t+h$ on nostettavissa määrä

$$Ce^{\int_0^h \delta_t(s)ds},$$

missä δ_t on ei-negatiivinen jatkuva funktio. Lyhyellä aikavälillä $[t+h, t+h+dh]$ korko on siis

$$\begin{aligned} Ce^{\int_0^{h+dh} \delta_t(s)ds} - Ce^{\int_0^h \delta_t(s)ds} &= Ce^{\int_0^h \delta_t(s)ds}\left(e^{\delta_t(h)dh} - 1\right) \\ &= Ce^{\int_0^h \delta_t(s)ds}\delta_t(h)dh \end{aligned}$$

(esitys ei ole täysin täsmällinen).

Nähdään, että $\delta_t(h)$ on tulkittavissa hetkelliseksi korkoutuvuudeksi kuten tehtiin myös kohdassa 2.1. Tämä riippuu siis sekä h:sta että t:stä.

Oletetaan, että lainanotto ja tallettaminen ovat aina mahdolisia ilman sivukuluja ja että funktiot δ_t kontrolloivat sopimuksia molempiin suuntiin. Tehdään seuraavat operaatiot:

1) hetkellä 0 talletetaan C euroa $t+h$ vuodeksi

2) hetkellä 0 talletetaan C euroa h vuodeksi, hetkellä h nostetaan mallin mukaiset

$$Ce^{\int_0^h \delta_0(s)ds} \quad \text{euroa,}$$

ja tämä talletetaan saman tien t vuodeksi.

Operaatio 1) antaa hetkellä $t+h$

$$Ce^{\int_0^{t+h} \delta_0(s)ds} \quad \text{euroa,}$$

operaatio 2) taas

$$Ce^{\int_0^h \delta_0(s)ds}e^{\int_0^t \delta_h(s)ds} \quad \text{euroa.}$$

Ainut panostus kummassakin operaatiossa on C euroa hetkellä nolla. Arbitraasivapaus edellyttää, että hetkellä $t+h$ saatavat rahamäärät ovat samat. Siis

$$\int_0^{t+h} \delta_0(s)ds = \int_0^h \delta_0(s)ds + \int_0^t \delta_h(s)ds.$$

Derivointi t:n suhteen antaa

$$\delta_0(t+h) = \delta_h(t).$$

Tämä motivoi käyttämään vain yhdestä aikaparametrista riippuvaa funktiota mallin kuvaamiseen. Merkitsemällä

$$\delta(t) = \delta_0(t)$$

ovat kaikki korot jo määrättävissä. Nimittäin hetkellä t tehtävä talletus C h vuodeksi kasvaa korkoa siten, että hetkellä $t+h$ on nostettavissa määrä

$$Ce^{\int_0^h \delta_t(s)ds} = Ce^{\int_0^h \delta_0(s+t)ds} = Ce^{\int_t^{t+h} \delta(s)ds}.$$

Korkouttaminen ja diskonttaus määritellään tässä korkoympäristössä luonollisella tavalla. Hetkellä t tapahtuvan rahasuorituksen $C(t)$ hetkeen $u > t$ korkoutettu arvo on

$$C(u) = C(t)e^{\int_t^u \delta(s)ds}$$

ja hetkeen $u < t$ diskontattu arvo

$$C(u) = C(t)e^{-\int_u^t \delta(s)ds}.$$

Erityisesti nykyarvo on

$$C(0) = C(t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}.$$

Funktiota δ kutsutaan *korkoutuvuudeksi*. Läheisesti tähän liittyvä käsite on *korkokäyrä* $r(t)$, joka määritellään ehdosta

$$(1+r(t))^t = e^{\int_0^t \delta(s)ds}, \quad t \geq 0.$$

Siis $r(t)$ on vuosikorkotyyppinen suure, joka kuvaa, miten t vuoden talletus kasvaa korkoa mallissa.

Tarkastellaan nyt kohdan 2.5.2 mukaista jatkuvamaksuista lainaa, jossa siis lainan määrä on L, laina-aika n ja laina maksetaan jatkuvalla kassavirralla intensiteettinä b. Jos sekä b että δ ovat jatkuvia, niin päädytään differentiaaliyhtälöön

$$L'(t) = \delta(t)L(t) - b(t), \tag{2.20}$$

missä $L(t)$ on lainan määrä hetkellä t. Tämä vastaa kaavaa (2.16). Samoin nähdään vaatimuksesta $L(n) = 0$, että

$$L = \int_0^n e^{-\int_0^s \delta(u)du} b(s)ds \tag{2.21}$$

ja

$$L(t) = Le^{\int_0^t \delta(s)ds} - \int_0^t e^{\int_s^t \delta(u)du} b(s)ds = \int_t^n e^{-\int_t^s \delta(u)du} b(s)ds. \tag{2.22}$$

Tulokset ovat kaavojen (2.17), (2.18) ja (2.19) luonnollisia yleistyksiä.

Mikäli sallitaan b:lle ja δ:lle äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, pätee (2.20) edelleen paitsi mainituissa epäjatkuvuuskohdissa. Diffentiaaliyhtälö johtaa edelleen yksikäsitteiseen ratkaisuun, kun vaaditaan lisäksi, että $L(\cdot)$ on jatkuva. Kaavat (2.21) ja (2.22) pätevät sellaisinaan.

Tarkastellaan vielä asiaa diskreettiaikaisesti. Mielivaltaisella välillä (t_1, t_2), $t_1 < t_2$, korkoa voidaan kuvata vuosikorolla $i = i(t_1, t_2)$ asettamalla

$$(1+i)^{t_2-t_1} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(u)du}.$$

Tarkastellaan kohdan 2.2 mukaista lainaa vaatimalla, että lainanantajan täytyy saada aikavälillä $[t_{j-1}, t_j)$ vuosikorkoa i_j vastaava korko ja laina täytyy tulla maksetuksi. Analogisesti kohdan 2.2 kanssa päädytään vaatimukseen

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^{n} (1+i_1)^{-t_1}(1+i_2)^{t_1-t_2}\cdots(1+i_j)^{t_{j-1}-t_j} B(t_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} e^{-\int_0^{t_j} \delta(s)ds} B(t_j), \end{aligned}$$

missä siis L on lainan määrä ja $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ maksuohjelma.

Joissain tilanteissa maksuohjelmassa on sekä jatkuva osa että yksittäisiä diskreettejä suorituksia. Koko kassavirran nykyarvo on näiden nykyarvojen summa. Tämä johtaa edellä esitettyjen tulosten luonnollisiin yleistyksiin. Esimerkiksi suoritukset $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ yhdessä jatkuvan kassavirran (intensiteettinä b) kanssa antavat lainanantajalle asianmukaisen koron, jos

$$L = \sum_{j=1}^{n} e^{-\int_0^{t_j} \delta(u)du} B(t_j) + \int_0^n e^{-\int_0^s \delta(u)du} b(s)ds.$$

3 Jäljellä oleva elinaika

Olkoon $T = T(0)$ vastasyntyneen jäljellä olevaa elinaikaa kuvaava satunnaismuuttuja. Oletetaan jatkossa, että T:n kertymäfunktio F on absoluuttisesti jatkuva eli että

$$F(t) = \mathbb{P}(T \le t) = \int_0^t f(s)ds, \quad \forall\, t \ge 0,$$

missä f on jakauman tiheysfunktio. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan vielä, että f:llä on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä äärellisillä väleillä. Tällöin $F'(t) = f(t)$ lukuunottamatta mahdollisia f:n epäjatkuvuuspisteitä.

Olkoon $T(x)$ x-ikäisen (elossa olevan) jäljellä oleva elinaika. Tällöin $T(x)$:n kertymäfunktio F_x määräytyy yhtälöistä

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathbb{P}\big(T(x) \le t\big) = \mathbb{P}(T \le x + t \,|\, T > x) \\ &= \frac{\mathbb{P}(x < T \le x + t)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Standardimerkintöjä henkivakuutusmatematiikassa ovat

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \mathbb{P}(x\text{-ikäinen elää } t \text{ vuoden kuluttua}) = 1 - F_x(t) \qquad (3.1) \\ &= \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}, \\ {}_tq_x &= \mathbb{P}(x\text{-ikäinen kuolee } t \text{ vuoden kuluessa}) = F_x(t) \qquad (3.2) \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}. \end{aligned}$$

Jos $t = 1$, merkitään lisäksi $p_x = {}_1p_x$ ja $q_x = {}_1q_x$. Jos $x = 0$, merkitään *selviytymistodennäköisyyttä* $s(t) = {}_tp_0$.

3.1 Kuolevuus

Olkoon x sellainen, että $F'(x) = f(x)$ ja $F(x) < 1$. Kaavan (3.2) nojalla mielivaltaiselle $\Delta > 0$

$${}_\Delta q_x = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{1 - F(x)}.$$

Näin ollen

$$\lim_{\Delta \to 0+} \frac{{}_\Delta q_x}{\Delta} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Oikealla puolella olevaa lauseketta merkitään $\mu(x)$:llä ja kutsutaan *kuolevuudeksi* tai *kuolevuusintensiteetiksi* iässä x. Siis

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Jos $F'(x)$ ei ole olemassa tai $F(x) = 1$ voidaan sopia esimerkiksi, että $\mu(x) = 0$. Myös $\mu(x) = \infty$ on perusteltu, jos $F(x) = 1$. Nämä poikkeamat voidaan käytännössä unohtaa ilman ongelmia.

Intuitiivisesti, todennäköisyys että x-ikäinen kuolee lyhyen ajan Δ kuluessa on likimain $\mu(x)\Delta$. Kuolevuus on siis yhden muuttujan funktio. Sen avulla voidaan määrätä kahden muuttujan funktiot ${}_tp_x$ ja ${}_tq_x$.

Lause 3.1. *Olkoon* $t \geq 0$, $x \geq 0$ *ja* $F(x+t) < 1$. *Silloin*

$$ {}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du}, \tag{3.3} $$

$$ {}_tq_x = 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du}. \tag{3.4} $$

Todistus. Riittää todistaa (3.3). Olkoon aluksi $x = 0$. Silloin

$$ {}_tp_0 = s(t) = 1 - F(t). $$

Jos $F'(t) = f(t)$ ja $F(t) < 1$, niin

$$ s'(t) = -f(t) = -\big(1 - F(t)\big)\frac{f(t)}{1 - F(t)} = -s(t)\mu(t). $$

Jos $t_1 > 0$ on f:n pienin epäjatkuvuuspiste, niin

$$ \frac{d}{dt}[\log s(t)] = -\mu(t) \tag{3.5} $$

välillä $(0, t_1)$. Koska $s(0) = 1$, on välttämättä

$$ \log s(t) = -\int_0^t \mu(u)du, \quad \forall\, t \in [0, t_1). $$

Siis

$$ s(t) = e^{-\int_0^t \mu(u)du}, \tag{3.6} $$

joten (3.3) pätee, kun $x = 0$ ja $t \in [0, t_1)$.

Jos t_2 on toiseksi pienin epäjatkuvuuspiste, niin (3.5) pätee alueessa $t \in (t_1, t_2)$. Koska $s(t) = 1 - F(t)$ on jatkuva, on lisäksi

$$ s(t_1) = e^{-\int_0^{t_1} \mu(u)du}. $$

Siis (3.6) pätee alueessa $t \in [0, t_2)$ ja edelleen (3.3) pätee alueesa $t \in [0, t_2)$, kun $x = 0$. Näin jatkaen todetaan, että (3.3) pätee, kun $x = 0$ kaikilla $t \geq 0$.

Yleiselle iälle x väite seuraa siitä, että

$$ {}_{t+x}p_0 = {}_xp_0\, {}_tp_x, $$

sillä

$$ \mathbb{P}(T > t + x) = \mathbb{P}\big(T > x, T > t + x\big) = \mathbb{P}\big(T > t + x \,|\, T > x\big)\mathbb{P}(T > x). $$

Siis alkuosan nojalla

$$ {}_tp_x = \frac{e^{-\int_0^{x+t}\mu(u)du}}{e^{-\int_0^{x}\mu(u)du}} = e^{-\int_x^{x+t}\mu(u)du}. $$

□

Seuraus 3.2. *Jäljelläolevan elinajan $T(x)$ tiheysfunktio f_x määräytyy ehdosta*

(3.7) $$ f_x(t) = \mu(x+t)_tp_x \quad \textit{m.k. alueessa } t > 0. $$

Edelleen

(3.8) $$ \mathbb{E}\big(T(x)\big) = \int_0^\infty t f_x(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt. $$

Todistus. Koska

$$ \mathbb{P}\big(T(x) \le t\big) = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}, $$

ja $s'(t) = -s(t)\mu(t)$ m.k., niin

$$ \begin{aligned} f_x(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\big(T(x) \le t\big) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)\mu(x+t)}{s(x)} = \mu(x+t)_tp_x. \end{aligned} $$

Väitteen (3.8) ensimmäinen osa seuraa tuloksesta (3.7). Jälkimmäinen esitys on yleinen ei-negatiivisia satunnaismuuttujia koskeva tulos: jos $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$, niin

$$ \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt. $$

□

Lauseen 3.1 nojalla luvun 3 alussa mainitut ehdot täyttävä kertymäfunktio voidaan esittää muodossa

(3.9) $$ F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)du}, \quad t > 0, $$

missä $\mu(t) = f(t)/[1 - F(t)]$ niissä pisteissä, joissa $F(t) < 1$ ja $F'(t)$ on olemassa. Nähdään, että μ:llä on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia äärellisillä väleillä. Merkitään

$$M = \sup\{t \mid F(t) < 1\} \in (0, \infty].$$

Jos ν on toinen ei-negatiivinen funktio, jolla on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia äärellisillä väleillä ja jolle pätee

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \nu(u)du}, \quad t \in (0, M), \tag{3.10}$$

niin ν ja μ yhtyvät alueessa $(0, M)$ yhteisissä jatkuvuuspisteissä. Ehdoista (3.9) ja (3.10) nimittäin seuraa, että näissä pisteissä

$$F'(t) = \mu(t)e^{-\int_0^t \mu(u)du} = \mu(t)\big(1 - F(t)\big),$$
$$F'(t) = \nu(t)e^{-\int_0^t \nu(u)du} = \nu(t)\big(1 - F(t)\big)$$

ja siis $\mu(t) = \nu(t)$. Esitys (3.9) on siis oleellisesti ottaen yksikäsitteinen. Edelleen

$$0 < {}_tp_0 = e^{-\int_0^t \mu(u)du}, \quad t \in (0, M),$$

ja

$$0 = {}_Mp_0 = e^{-\int_0^M \mu(u)du}.$$

Todetaan, että kuolevuus toteuttaa ehdot

$$\int_0^t \mu(u)du < \infty, \quad \forall t \in (0, M), \tag{3.11}$$

ja

$$\int_0^M \mu(u)du = \infty. \tag{3.12}$$

Todistetaan lopuksi käänteinen tulos.

Lause 3.3. *Olkoon μ ei-negatiivinen funktio, jolla on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia äärellisillä väleillä ja joka toteuttaa ehdot* (3.11) *ja* (3.12) *eräälle $M > 0$. Silloin ehto*

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)du}, & t \in [0, M), \\ 1, & t \geq M, \end{cases}$$

määrittelee ei-negatiivisen satunnaismuutujan kertymäfunktion. Lisäksi F:llä on tiheysfunktio f,

$$f(t) = \mu(t)\big(1 - F(t)\big), \quad t \in (0, M),$$

ja siis μ on F-jakautuneen satunnaismuuttujan kuolevuus. Edelleen F on ainut jatkuva jakauma, jolle yhtälö

$$\mu(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}$$

pätee μ:n jatkuvuuspisteissä joukossa $t \in (0, M)$.

Todistus. Selvästi F on jatkuva ja kasvava alueessa $[0, M)$. Oletuksen (3.12) nojalla

$$\lim_{t \to M-} F(t) = 1.$$

Siis F on jatkuva ja kasvava alueessa $[0, \infty)$. Lisäksi $F(0) = 0$. Nähdään, että F on erään ei-negatiivisen satunnaismuuttujan kertymäfunktio. Jos μ on jatkuva pisteessä $t \in (0, M)$, niin

$$F'(t) = \mu(t) e^{-\int_0^t \mu(u) du} = \mu(t)\big(1 - F(t)\big).$$

Jos G on toinen jakauma, jota vastaava kuolevuus on μ, niin lauseen 3.1 nojalla

$$G(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u) du} = F(t).$$

□

3.2 Kuolevuusmalleja

Todellista kuolevuutta tai elinajan jakaumaa ei tietenkään tunneta. Nämä joudutaan siis estimoimaan havainnoista ja suorittamaan asianmukaisia korjauksia (historia ei yleensä vastaa nykytilannetta, joten suoraviivainen estimointi ei anna käyttökelpoisia tuloksia). Usein kuolevuus esitetään sopivan matemaattisen funktion avulla. Tämä valitaan siten, että se approksimoi riittävän tarkasti muuten määrättyä kuolevuutta. Tällainen sovittaminen toisaalta tasoittaa aineistossa ilmenevää satunnaisheilahtelua. Esimerkkejä kuolevuusmalleista:

Gombertz: $\mu(x) = b \cdot e^{cx}$ $\quad (b, c > 0$ ovat vakioita)

Makeham: $\mu(x) = a + b \cdot e^{cx}$ $\quad (a, b, c > 0$ ovat vakioita)
Lisäys a tulkitaan tapaturmien osuudeksi kuolevuudessa, joka oletetaan iästä riippumattomaksi.

Weibull: $\mu(x) = b \cdot x^d$ $\quad (b, d > 0$ vakioita).

3.3 Kuolevuuteen vaikuttavia tekijöitä

Edellä kuolevuus määriteltiin iästä riippuvana funktiona. Tämän lisäksi on monia muita tekijöitä, jotka vaikuttavat jäljellä olevan elinajan jakaumaan. Esimerkiksi miesten ja naisten kuolevuudet ovat havaintojen perusteella erilaisia. Samoin elämäntavat vaikuttavat kuolevuuteen (esimerkiksi tupakointi ja harrastukset).

Vakuutustoiminnassa otetaan tyypillisesti huomioon myös valinnan vaikutus kuolevuuteen. Henkivakuutus myönnetään usein vain, mikäli terveydentila on riittävän hyvä. Välittömästi vakuutuksen myöntämisen jälkeen vakuutetun kuolevuus on tästä syystä väestökuolevuutta pienempi. Toisin sanoen vakuutuskantaan valikoituu keskimääräistä terveempiä ihmisiä, joiden voi olettaa elävän pidempään. Tällöin puhutaan *selektikuolevuudesta*. Asiaa on tarkasteltu laajemmin lähteessä Pesonen et al. (2014), kohta 2.4.

Jatkossa tarkastellaan kuolevuutta kuitenkin vain iän funktiona. Lähtökohtana on, että tarkastellaan kulloinkin sopivaa vakuutettujen joukkoa, jossa kuolevuus riippuu vain iästä. Usean henkilön vakuutuksissa sallitaan erilaisia kuolevuuksia eri henkilöillä.

3.4 Kilpailevat kuolinsyyt

Kuolinsyiden tutkiminen ja mahdollinen poistuminen ovat kiinnostavia yleisestä näkökulmasta. Henkivakuutuksessa asia tulee esiin esimerkiksi silloin, kun korvaus tapaturmaisesta kuolemasta on erilanen kuin muista syistä johtuvasta kuolemasta.

Kilpailevien kuolinsyiden teoriassa lähtökohdaksi otetaan hypoteettiset jäljelläolevat elinajat T_j, kun ainoastaan kuolinsyy j on vaikuttamassa, $j = 1, \dots, n$. Näistä havaitaan ainoastaan pienin. Merkitään

$$T = \min(T_1, \dots, T_n).$$

Eräs peruskysymys on, miten T:n jakauma muuttuu, jos jokin kuolinsyy pystytään poistamaan.

Olkoon μ_j elinaikaa T_j vastaava kuolevuus. Jos $T_1 \dots, T_n$ ovat riippumattomia, niin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(T_j > t, \forall j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(T_j > t) \\ &= \prod_{j=1}^{n} e^{-\int_0^t \mu_j(u)du} = e^{-\int_0^t \left(\mu_1(u) + \dots + \mu_n(u)\right)du}.\end{aligned}$$

Siis kokonaiskuolevuus on $\mu(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t)$. Jos nyt kuolinsyy k poistuu, niin uusi kokonaiskuolevuus $\bar{\mu}(t)$ on

$$\bar{\mu}(t) = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \mu_j(t). \tag{3.13}$$

Tämä ei kuitenkaan vielä ole käyttökelpoinen tulos, koska hypoteettisia kuolevuuksia vastaavia elinaikoja ei havaita suoraan.

Olkoon kuten aiemminkin $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ alueessa $t \geq 0$. Havaintoja pystytään tekemään toisaalta F:stä T:n välityksellä ja toisaalta epäaidoista jakaumista

$$\begin{aligned} G_j(t) &= \mathbb{P}(T \leq t, \text{ kuolinsyy} = j) \\ &= \mathbb{P}(T \leq t, T = T_j). \end{aligned}$$

Oletetaan nämä tunnetuiksi ja pyritään määräämään $\bar{\mu}$. Hypoteettisten elinaikojen T_j oletetaan toteuttavan luvun 3 alussa esitetyt säännöllisyysehdot.

Lause 3.4. *Oletetaan, että $T_1, \ldots, T_n$ ovat riippumattomia. Silloin*

$$\mu_j(t) = \frac{G_j'(t)}{1 - F(t)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pisteissä t, joissa $G_j'(t)$ on olemassa ja $F(t) < 1$.

Tuloksesta on välittömästi määrättävissä kokonaiskuolevuus kuolinsyyn poistumisen jälkeen. Myös funktiot G_j muuttuvat, jos jokin syy poistuu. Olkoon poistuva syy k. Lauseen 3.4 tulos pätee poistumisen jälkeenkin, joten jäljellä oleville kuolinsyille pätee

$$G_j'(t) = \mu_j(t)\big(1 - \bar{F}(t)\big),$$

missä $\bar{F}$ on kuolevuuteen $\bar{\mu}$ liittyvän jäljellä olevan elinajan kertymäfunktio. Tästä G_j ratkeaa alkuehdolla $G_j(0) = 0$.

Jos toisaalta μ_j, $j = 1, \ldots, n$, on tunnettu, voidaan todennäköisyydet $G_j(t)$ määrätä lauseen 3.4 avulla.

Todistus. Olkoon $t > 0$ sellainen, että $\mathbb{P}(T > t) \in (0, 1)$. Olkoon edelleen $\Delta > 0$ pieni. Tällöin

$$\begin{aligned} G_j(t + \Delta) - G_j(t) &= \mathbb{P}\big(T_j \in (t, t + \Delta], T_r > T_j, \text{ kun } r \neq j\big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(T_j \in (t, t + \Delta], T_r > t, \text{ kun } r \neq j\big). \end{aligned}$$

Riippumattomuusoletuksen nojalla

$$\begin{aligned} G_j(t + \Delta) - G_j(t) &\leq \mathbb{P}\big(T_j \in (t, t + \Delta]\big) \prod_{r \neq j} \mathbb{P}(T_r > t) \\ &= \mathbb{P}(T_j \leq t + \Delta \,|\, T_j > t)\mathbb{P}(T > t). \end{aligned}$$

Samoin

$$\begin{aligned} G_j(t + \Delta) - G_j(t) &\geq \mathbb{P}\big(T_j \in (t, t + \Delta]\big) \prod_{r \neq j} \mathbb{P}(T_r > t + \Delta) \\ &= \mathbb{P}(T_j \leq t + \Delta \,|\, T_j > t) \frac{\mathbb{P}(T_j > t)}{\mathbb{P}(T_j > t + \Delta)} \mathbb{P}(T > t + \Delta). \end{aligned}$$

Kaiken kaikkiaan

$$G_j(t+\Delta) - G_j(t) = \mathbb{P}(T_j \leq t+\Delta \mid T_j > t)\big(\mathbb{P}(T > t) + o(1)\big),$$

missä $o(1) \to 0$, kun $\Delta \to 0+$. Lauseen 3.1 nojalla

$$\mathbb{P}(T_j \leq t+\Delta \mid T_j > t) = 1 - e^{-\int_t^{t+\Delta} \mu_j(u)du} = \mu_j(t)\Delta\big(1 + o(1)\big)$$

niissä pisteissä t, joissa μ_i on jatkuva. Todetaan, että

$$G_i'(t) = \mu_i(t)\big(1 - F(t)\big).$$

Oikeastaan edellä saatiin tulos vain G_j:n oikeanpuoleiselle derivaatalle. Tämä on kuitenkin myös derivaatta oikeanpuoleisen derivaatan ja G_j:n jatkuvuuden nojalla. $\square$

4 Henkivakuutusten hinnoittelusta

Tarkastellaan johdannoksi hinnoittelussa sovellettavaa *ekvivalenssiperiaatetta* esimerkin valossa. Olkoon vakuutus sellainen, että yhtiö korvaa vakuutetun omaisille määrän S, jos vakuutettu kuolee seuraavan n vuoden aikana. Oletetaan edelleen, että vakuutettu on juuri (hetkellä 0) saavuttanut iän x ja että suoritus S tapahtuu hetkellä k, jos vakuutettu kuolee välillä $[k-1,k)$. Ensimmäinen mahdollinen korvaushetki on siis 1 (jos vakuutettu kuolee x-ikäisenä).

Olkoon $T = T(x)$ vakuutetun jäljellä oleva elinaika.. Hetkellä k yhtiö korvaa määrän

$$S\mathbb{1}(k-1 \le T < k) \doteq \xi_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Koko korvausprosessi on kuvattavissa satunnaisvektorilla

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Korkeintaan yksi vektorin komponeista eroaa nollasta (ja on tällöin yhtä kuin S) 'omegoittain'.

Vakuutusyhtiöllä on tavallisesti suuri joukko vakuutettuja. Lähdetään oletuksesta, että kunkin vakuutetun j korvausprosessi ξ^j on samoin jakautunut kuin ξ, ja että vakuutettujen korvausprosessit ovat toisistaan riippumattomia. Olkoon N vakuutettujen lukumäärä. Suurten lukujen lain nojalla yleisin ehdoin

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\xi^1 + \cdots + \xi^N}{N} = \mathbb{E}(\xi) = \big(\mathbb{E}(\xi_1), \ldots, \mathbb{E}(\xi_n)\big) \ \text{ m.v.}$$

tai heikommin

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi^1 + \cdots + \xi^N}{N} - \mathbb{E}(\xi)\right| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Jos vakuutettujen lukumäärä N on suuri, on hetken k korvausmäärä yhteensä korkeintaan $N\big(\mathbb{E}(\xi_k)+\varepsilon\big)$ suurella todennäköisyydellä. Vuoden k korvausten maksamiseen riittää tällöin määrä $\mathbb{E}(\xi_k) + \varepsilon$ per vakuutettu. Unohdetaan 'pieni' ε seuraavassa.

Oletetaan vielä, että vakuutusmaksu maksetaan kertasuorituksella vakuutuksen tekohetkellä 0. Olkoon tämä P. Oletetaan, että yhtiö voi sijoittaa P:n siltä osin kuin se ei ole kulunut korvauksiin. Tarkemmin, oletetaan että P talletetaan pankkitilille ja että tähän liittyvä korkoutuvuus δ on jatkuva funktio. Hetkellä 1+ yhtiön hallussa olevat varat sopimuksista ovat keskimääräisellä tasolla

$$N\left(Pe^{\int_0^1 \delta(s)ds} - \mathbb{E}(\xi_1)\right).$$

Vastaavasti tilanne vuoden 2 alussa on

$$e^{\int_1^2 \delta(s)ds} N\left(Pe^{\int_0^1 \delta(s)ds} - \mathbb{E}(\xi_1)\right) - N\mathbb{E}(\xi_2) = N\left(Pe^{\int_0^2 \delta(s)ds} - e^{\int_1^2 \delta(s)ds}\mathbb{E}(\xi_1) - \mathbb{E}(\xi_2)\right).$$

Hetkellä n varallisuuden keskiarvo on

$$N\left(Pe^{\int_0^n \delta(s)ds} - e^{\int_1^n \delta(s)ds}\mathbb{E}(\xi_1) - e^{\int_2^n \delta(s)ds}\mathbb{E}(\xi_2) - \cdots - \mathbb{E}(\xi_n)\right). \tag{4.1}$$

Tulot ja menot ovat suurten lukujen lain mielessä tasapainossa, jos saatu keskiarvo on 0 eli jos

$$P = \sum_{k=1}^{n} e^{-\int_0^k \delta(s)ds}\mathbb{E}(\xi_k) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\int_0^k \delta(s)ds}\xi_k\right). \tag{4.2}$$

Tätä tapaa määrätä P kutsutaan ekvivalenssiperiaatteeksi. Tällöin siis P on korvausten nykyarvon odotusarvo, jota kutsutaan korvausten *pääoma-arvoksi* tai vakuutuksen *nettokertamaksuksi.*

Edellä 'unohdettu' poikkeama ε voidaan ottaa huomioon erikseen esimerkiksi käyttämällä todellisena maksuna määrää $(1+\lambda)P$, missä λ on positiivinen vakio (varmuuslisä). Vaihtoehtoisesti voitaisiin valita korko- ja kuolevuusperuste turvaavasti. Näin päästään tilanteeseen, jossa tulot riittävät menoihin suurella todennäköisyydellä. Lähtökohtana on, että vakuutusmaksun tulee riittää korvauksiin ilman jälkeenpäin tehtäviä lisäperintöjä. Jos taas vakuutusmaksut osoittautuvat liian suuriksi, voidaan ylijäämä käyttää vakuutettujen hyväksi (esimerkiksi nostamalla korvaussummaa S).

Esimerkissä tarkasteltiin asiaa ja varmuusmarginaalin tarvetta vain kuolemiseen liittyvän epävarmuuden osalta. Sijoitustoimintaan liittyy kuitenkin myös riskejä. Lähinnä kyse on siitä, saadaanko korko-oletusta vastaava tuotto vai ei siten, että vakuutusmaksut yhdessä sijoitustoiminnan tuottojen kanssa riittävät korvauksiin. Tätä riskiä ei jatkossa juurikaan tarkastella.

Seuraavassa johdetaan esitykset nettokertamaksuille eräille tavallisille henkivakuutustyypeille. Vakiokoron tapauksessa näille on käytössä jatkossa esiteltävät standardimerkinnät

$$A_{x:\overline{n}|}(V),\ A_{x:\overline{n}|}(K),\ a_{x:\overline{n}|},\ \ldots.$$

Samoja symboleja tullaan käyttämän myös yleisen deterministisen koron tapauksessa ellei sekaantumisen vaaraa ole.

4.1 Elämänvaravakuutuksen nettokertamaksu

Elämänvaravakuutuksessa yhtiö suorittaa sovitun korvauksen S, jos vakuutettu on elossa sopimuksen päättyessä. Tätä kutsutaan myös säästövakuutukseksi.

Olkoon vakuutettu x-ikäinen ja *vakuutuskauden* pituus n (sopimus siis päättyy n vuoden kuluttua, jolloin mahdollinen korvaus tulee maksettavaksi). Tulevat korvaukset ovat

$$S\mathbb{1}(T>n) = \begin{cases} 0, & \text{jos } T \le n \\ S, & \text{jos } T > n, \end{cases}$$

missä $T = T(x)$ tarkoittaa jäljellä olevaa elinaikaa. Ekvivalenssiperiaatteen mukainen nettokertamaksu P on

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^n \delta(s)ds} S\mathbb{1}(T > n)\right) = e^{-\int_0^n \delta(s)ds} S\mathbb{P}(T > n) \\ &= e^{-\int_0^n \delta(s)ds} S e^{-\int_x^{x+n} \mu(s)ds} = S e^{-\int_0^n \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}. \end{aligned}$$

Jos $S = 1$, käytetään nettokertamaksusta merkintää $A_{x:\overline{n}|}(V)$. Siis

$$P = SA_{x:\overline{n}|}(V).$$

4.2 Kuolemanvaravakuutuksen nettokertamaksu

Kuolemanvaravakuutuksessa yhtiö suorittaa korvauksen S kuolinhetkellä, jos tämä tapahtuu vakuutuskauden aikana.

Olkoon vakuutettu x-ikäinen ja vakuutuskauden pituus n. Tällöin korvaus on

$$S\mathbb{1}(T \le n) = \begin{cases} S, & \text{jos } T \le n \\ 0, & \text{jos } T > n. \end{cases}$$

Korvauksen nykyarvo on $e^{-\int_0^T \delta(s)ds} S\mathbb{1}(T \le n)$ ja nettokertamaksu

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^T \delta(s)ds} S\mathbb{1}(T \le n)\right) = S\int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \mu(x+t)\, {}_tp_x dt \\ &= S\int_0^n \mu(x+t) e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} dt \end{aligned}$$

seurauksen 3.2 ja lauseen 3.1 nojalla.

Jos $S = 1$, käytetään nettokertamaksusta merkintää $A_{x:\overline{n}|}(K)$. Täten

$$P = SA_{x:\overline{n}|}(K).$$

Muodollisesti P voidaan tulkita jatkuvan kassavirran nykyarvoksi intensiteettinä

$$b(t) = \mu(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds},$$

tai myöskin intensiteettiä

$$b(t) = \mu(x+t), \quad t \in [0, n],$$

vastaavan jatkuvan kassavirran nykyarvoksi, kun korkoutuvuus hetkellä t on

$$\delta(t) + \mu(x+t).$$

Niin sanotussa *yhdistetyssä vakuutuksessa* summa S maksetaan vakuutetun kuolinhetkellä vakuutusaikana tai vakuutuksen päättyessä, jos vakuutettu on tällöin elossa. Tällöin S tulee aina maksettavaksi, ainoastaan maksuhetki on satunnainen. Ilmeisesti nettokertamaksu P on elämänvara- ja kuolemanvaravakuutuksen nettokertamaksujen summa,

$$P = S\left(A_{x:\overline{n}|}(V) + A_{x:\overline{n}|}(K)\right).$$

4.3 Eläkevakuutuksen nettokertamaksu

Vanhuuseläkevakuutuksessa yhtiö suorittaa vuosittain etukäteen summan S sovitusta iästä lähtien niin kauan, kuin vakuutettu on elossa.

Olkoon vakuutettu x-ikäinen. Oletetaan, että ensimmäinen mahdollinen eläke maksetaan n vuoden kuluttua. Tällöin tapahtuu suoritus

$$S\mathbb{1}(T > n) = \begin{cases} 0, & \text{jos } T \leq n \\ S, & \text{jos } T > n. \end{cases}$$

Yleisesti, jos $k > n$, $k \in \mathbb{N}$, niin k vuoden kuluttua tapahtuu suoritus $S\mathbb{1}(T > k)$. Korvausten nykyarvo on

$$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\int_0^k \delta(s)ds} S\mathbb{1}(T > k)$$

ja nettokertamaksu

$$P = S\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\int_0^k \delta(s)ds} {}_kp_x = S\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\int_0^k \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}.$$

Jos $S = 1$, käytetään nettokertamaksusta merkintää ${}_{n|}\ddot{a}_x$, joten

$$P = S{}_{n|}\ddot{a}_x.$$

Eläkevakuutuksesta on monia muunnelmia.

Määräaikainen eläke. Eläkesuorituksia maksetaan kuten edellä, mutta korkeintaan w kappaletta eli korkeintaan ikään $x + n + w - 1$ saakka. Jos $S = 1$, merkitään nettokertamaksua symbolilla ${}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{w}|}$. Ilmeisesti

$${}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{w}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x - {}_{n+w|}\ddot{a}_x.$$

Takakäteinen eläke. Eläke maksetaan vuoden lopussa, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Suoritusta $S = 1$ vastaavat nettokertamaksun symbolit ovat ${}_{n|}a_x$ ja ${}_{n|}a_{x:\overline{w}|}$. Selvästi

$${}_{n|}a_x = {}_{n+1|}\ddot{a}_x$$

ja

$${}_{n|}a_{x:\overline{w}|} = {}_{n+1|}\ddot{a}_{x:\overline{w}|}.$$

Monieräinen eläke. Jos suorituksia tehdään m kertaa vuodessa yhteensä määrä 1, merkitään nettokertamaksuja symboleilla ${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)}$, ${}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{w}|}^{(m)}, \ldots$. Näiden määrääminen on analogista tapauksen $m = 1$ kanssa.

Heti alkava eläke. Jos $n = 0$, jätetään n ilmoittamatta ja merkitään $\ddot{a}_x$, $\ddot{a}_x^{(m)}, \ldots$.

Jatkuva eläke. Tähän päästään antamalla erien määrän m kasvaa rajatta. Raja-arvoa merkitään symbolilla ${}_{n|}\bar{a}_x$, ${}_{n|}\bar{a}_{x:\overline{w}|}, \ldots$. Jos $w = \infty$, niin

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\int_0^{n+\frac{k}{m}} \delta(s)ds} {}_{n+\frac{k}{m}}p_x = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\int_0^{n+\frac{k}{m}} \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \\
&\xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{n+t} \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} dt \doteq {}_{n|}\bar{a}_x.
\end{aligned}
$$

Intuitiivisesti tämä vastaa sopimusta, jossa eläke hetkellä $t > n$ on $1 \cdot dt$, jos vakuutettu on tällöin elossa. Tätä vastaa nettokertamaksu

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_n^{\infty} e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\mathbb{1}(T > t)dt\right] &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_n^{\infty} e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\mathbb{P}(T > t)dt \\
&= \int_n^{\infty} e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{n+t} \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} dt \quad \left(= {}_{n|}\bar{a}_x\right).
\end{aligned}
$$

Kolmas tapa päätyä samaan nettokertamaksuun on määrätä odotusarvo

$$
\mathbb{E}\left[e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\bar{a}_{\overline{T-n}|}\mathbb{1}(T > n)\right],
$$

missä

$$
\bar{a}_{\overline{T-n}|} = \int_0^{T-n} e^{-\int_n^{n+t} \delta(s)ds} dt.
$$

Tämä vastaa kohdassa 2.5 käytettyä merkintää, mutta korkoutuvuus ei nyt ole vakio.

4.4 Kommutaatioluvuista

Kuolevuuden ja korkoutuvuuden ollessa annettuja pystytään edellä esitetyt nettokertamaksut määräämään ainakin numeerisesti. Käytännön laskentarutiineisa voidaan hyödyntää myös *kommutaatiolukuja.*

Oletetaan, että korkoutuvuus on vakio. Merkitään

$$
\begin{aligned}
l_x &= l_0 e^{-\int_0^x \mu(s)ds} = l_0\, {}_xp_0, \\
D_x &= e^{-\delta x}\, {}_xp_0 = e^{-\int_0^x \left(\delta+\mu(s)\right)ds}, \\
\bar{N}_x &= \int_x^{\infty} D_t\, dt, \\
\bar{M}_x &= \int_x^{\infty} \mu(t) D_t\, dt.
\end{aligned}
$$

Edellä l_0 on vakio ja tulkitaan populaation alkukooksi, esimerkiksi $l_0 = 10^6$. Tällöin l_x kuvaa populaation odotettavissa olevaa kokoa x vuoden kuluttua.

Taulukoimalla esitetyt luvut esimerkiksi x:n arvoilla $0, 1, 2, \ldots$ saadaan nettokertamaksut vastaavan ikäisille vakuutetuille. Nimittäin

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}(V) &= \frac{D_{x+n}}{D_x}, \\ A_{x:\overline{n}|}(K) &= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}, \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}. \end{aligned}$$

Jos x ei ole kokonaisluku, voidaan käyttää esimerkiksi interpolointia. Kommutaatioluvut riippuvat vain yhdestä aikaparametrista, nimittäin x:stä. Nettokertamaksut riippuvat sekä x:stä että n:stä.

4.5 Nettovakuutusmaksut

Kertamaksun sijaan vakuutusmaksu jaksotetaan usein pidemmälle ajalle. Tavallinen järjestely on, että vakuutusmaksuja suoritetaan vuosittain tasaerinä. Suorituksia tehdään sopimuksen mukaiset h vuotta, kuitenkin korkeintaan niin kauan kuin vakuutettu on elossa. Kertyvien vakuutusmaksujen määrä on siis myös satunnaismuuttuja. Luonnollisesti $h \leq n$, missä n on kohtien 4.1, 4.2 ja 4.3 mukainen vakuutuskausi.

Suurten lukujen lakiin perustuen myös tähän soveltuu ekvivalenssiperiaate. Jos *vuosimaksu* on $P^{(1)}$, niin se määräytyy vaatimuksesta

$$P = P^{(1)} \sum_{k=0}^{h-1} e^{-\int_0^k \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right) ds} = P^{(1)} \ddot{a}_{x:\overline{h}|}, \tag{4.3}$$

missä P on vakuutuksen nettokertamaksu. Kaavan (4.3) oikealla puolella on siis vakuutusmaksujen nykyarvon

$$P^{(1)} \sum_{k=0}^{h-1} e^{-\int_0^k \delta(s) ds} \mathbb{1}(T > k)$$

odotusarvo.

Analogisesti määritellään m kertaa vuodessa suoritettavan vakuutusmaksun suuruus. Jatkuva vakuutusmaksuintensiteetti $\bar{P}$ määritellään ehdosta

$$P = \bar{P} \int_0^h e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right) ds} dt = \bar{P} \bar{a}_{x:\overline{h}|}.$$

Intuitiivisesti, hetkellä t maksetaan määrä $\bar{P}dt$, jos vakuutettu on elossa. Yleisemmin, jos vakuutusmaksuintensiteetti hetkellä t on $\bar{P}(t)$, on oltava

$$P = \int_0^h \bar{P}(t) e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} dt.$$

4.6 Usean vakuutetun henkivakuutukset

Vakuutuksissa on toisinaan useita mahdollisia korvauksen saajia tai korvauksen maksaminen perustuu muuten useaan elinaikaan. Esimerkiksi vakuutetun kuollessa maksetaan eläkettä sekä leskelle että lapsille tai lapsille maksetaan eläkettä, jos kumpikaan vanhemmista ei ole elossa.

Tarkastellaan seuraavassa yleisesti N henkilön joukkoa $\{1, \ldots, N\}$. Olkoot näiden jäljellä olevat elinajat $T_1, \ldots, T_N$. Oletetaan, että nämä ovat toisistaan riippumattomia. Merkitään

$$T_{j_1 \cdots j_k} = \min(T_{j_1}, \ldots, T_{j_k}), \tag{4.4}$$

$k \in \{1, \ldots, N\}$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq N$. Riippumattomuusoletuksen nojalla elinaikaan $T_{j_1 \cdots j_k}$ liittyvä kuolevuus $\mu_{x_{j_1} \cdots x_{j_k}}$ määräytyy ehdosta

$$\mu_{x_{j_1} \cdots x_{j_k}}(t) = \mu_{j_1}(x_{j_1} + t) + \ldots + \mu_{j_k}(x_{j_k} + t), \quad t \geq 0,$$

missä μ_j on elinaikaan T_j liittyvä kuolevuus. Henkilö j oletetaan x_j-ikäiseksi hetkellä nolla ja kuolevuudet $\mu_1, \ldots, \mu_N$ ovat vastasyntyneiden kuolevuuksia. Elinaikaan $T_{j_1 \ldots j_k}$ sidotut vakuutusmaksut ovat määrättävissä suoraviivaisesti aiemmin esitetyillä menetelmillä. Seuraavassa pyritään palauttamaan yleisten sopimusten käsittely näihin.

4.6.1 Elossa olevien lukumäärään perustuvat korvaukset

Oletetaan, että korvaukset riippuvat vain elossa olevien henkilöiden lukumäärästä. Tarkastellaan nytkin perustyyppejä:

a) **Elämänvaravakuutus**. Elinaikaan $T_{j_1 \cdots j_k}$ perustuvan yksikköelämänvaravakuutuksen nettokertamaksua merkitään symbolilla

$$A_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} : \overline{n}|}(V).$$

Hetkellä n siis maksetaan korvaus 1, jos $T_{j_1 \cdots j_k} > n$. Symboli

$$A_{\overset{[m]}{\overline{x_1 \cdots x_N}} : \overline{n}|}(V)$$

vastaa sopimusta, jonka perusteella maksetaan hetkellä n korvaus 1, jos tällöin elossa on tasan m henkilöä ja symboli

$$A_{\overset{m}{\overline{x_1 \cdots x_N}} : \overline{n}|}(V)$$

sopimusta, jonka perusteella maksetaan hetkellä n korvaus 1, jos tällöin elossa on vähintään m henkilöä.

b) **Kuolemanvaravakuutus**. Elinaikaan $T_{j_1\cdots j_k}$ perustuvan yksikkökuolemanvaravakuutuksen nettokertamaksua merkitään symbolilla

$$A_{x_{j_1}\ldots x_{j_k}:\overline{n}|}(K).$$

Hetkellä $T_{j_1\cdots j_k}$ siis maksetaan korvaus 1 jos $T_{j_1\cdots j_k} \le n$. Symboli

$$A_{\overline{x_1\cdots x_N:\overline{n}|}}^{\,N-m+1}(K)$$

vastaa sopimusta, jossa maksetaan korvaus 1 m. kuoleman sattuessa, jos tämä tapahtuu ennen hetkeä n.

c) **Eläkevakuutus**. Elinaikaan $T_{j_1\cdots j_k}$ perustuvan määräaikaisen jatkuvan yksikköeläkkeen nettokertamaksua merkitään symbolilla

$$\bar{a}_{x_{j_1}\cdots x_{j_k}:\overline{n}|}$$

(eläke alkaa heti ja sitä maksetaan $\min(T_{j_1\cdots j_k}, n)$ vuotta). Vastaavasti symboli

$$\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:\overline{n}|}}^{\,[m]}$$

vastaa sopimusta, jossa maksetaan eläkettä intensiteetillä 1, kun tasan m henkilöä on elossa ja symboli

$$\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:\overline{n}|}}^{\,m}$$

sopimusta, jossa maksetaan eläkettä intensiteetillä 1, kun vähintään m henkilöä on elossa.

Analogisesti voitaisiin määritellä symbolit diskreettien, lykättyjen ja ikuisten eläkkeiden nettokertamksuille. Merkinnät ovat vakiintuneita korkoutuvuuden ollessa kiinteä. Tässä korko on yleinen, mutta käytetään kuitenkin edellä esitettyjä merkintöjä.

Kuolemanvaravakuutukseen liittyvä merkintä $N - m + 1$ saattaa näyttää epäjohdonmukaiselta. Luonnollinen tulkinta tässä yhteydessä on kuitenkin ’tilatarkastelu’. Viivan yläpuolella kerrotaan, mikä elossaolotila on kyseessä. Siis $[m]$ tarkoittaa, että tasan m henkilöä on elossa ja m, että vähintään m henkilöä elossa. Kuolemanvaravakuutuksessa tila $N - m + 1$ päättyy m. kuoleman sattuesssa (samoin tietysti $[N - m + 1]$).

Peruselementtejä edellä esitetyissä määritelmissä ovat elinaikoihin $T_{j_1\cdots j_k}$ perustuvat vakuutukset, joiden hinnoittelu siis tehdään aiemmin esitetyllä tavalla. Muiden vakuutusten hinnoittelu palautuu näihin seuraavassa esitettävien tulosten avulla.

Lause 4.1. *Olkoon*

$${}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\,[m]} = \mathbb{P}(\textit{tasan } m \textit{ henkilöä elossa hetkellä } t)$$

ja

$$ {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m} = \mathbb{P}(\textit{vähintään } m \textit{ henkilöä elossa hetkellä } t), $$

$m = 0, 1 \ldots, N$. *Silloin*

$$ {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;[m]} = \sum_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} {}_t\sigma_j, \quad m = 0, 1, \ldots, N, \tag{4.5} $$

ja

$$ {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m} = \sum_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} \binom{j-1}{j-m} {}_t\sigma_j, \quad m = 1, \ldots, N, \tag{4.6} $$

missä

$$ {}_t\sigma_j = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} {}_tp_{x_{i_1}} \cdots {}_tp_{x_{i_j}}. $$

Todistus. Olkoon $1 \le j_1 < \ldots < j_m \le N$ ja

$$ B_t(j_1, \ldots, j_m) = \mathbb{1}(T_{j_1} > t, \ldots, T_{j_m} > t, T_r \le t, \forall r \notin \{j_1, \ldots, j_m\}). \tag{4.7} $$

Tällöin

$$ {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;[m]} = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le N} \mathbb{E}\big(B_t(j_1, \ldots, j_m)\big). $$

Selvästi

$$ \begin{aligned} B_t(j_1, \ldots, j_m) &= \mathbb{1}(T_{j_1} > t) \cdots \mathbb{1}(T_{j_m} > t) \left[\prod_{r\notin\{j_1,\ldots,j_m\}} \big(1 - \mathbb{1}(T_r > t)\big) \right] \\ &= \sum (-1)^k \mathbb{1}(T_{j_1} > t) \cdots \mathbb{1}(T_{j_m} > t) \mathbb{1}(T_{p_1} > t) \cdots \mathbb{1}(T_{p_k} > t), \end{aligned} \tag{4.8} $$

missä summaus ulotetaan yli indeksiyhdistelmien

$$ 1 \le p_1 < \ldots < p_k \le N, \; k = 0, 1, \ldots, N-m, $$

jotka toteuttavat ehdon

$$ \{p_1, \ldots, p_k\} \subseteq \{1, \ldots, N\} \backslash \{j_1, \ldots, j_m\}. $$

Kiinteällä k:n arvolla kukin summattava kaavassa (4.8) esiintyy $\binom{k+m}{m}$ eri $B_t(q_1, \ldots, q_m)$:ssä. Siis

$$ {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;[m]} = \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^k \binom{k+m}{m} {}_t\sigma_{k+m} = \sum_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} {}_t\sigma_j. $$

Toisen väitteen todistamiseksi todetaan, että

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m} &= \sum_{k=m}^{N} {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{[k]} = \sum_{k=m}^{N}\sum_{j=k}^{N}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}{}_t\sigma_j \\
&= \sum_{j=m}^{N} {}_t\sigma_j \sum_{k=m}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k} \\
&= \sum_{j=m}^{N} {}_t\sigma_j \left[\sum_{k=m}^{j-1}(-1)^{j-k}\left(\binom{j-1}{k-1}+\binom{j-1}{k}\right)+1\right] \\
&= \sum_{j=m}^{N} {}_t\sigma_j(-1)^{j-m}\binom{j-1}{m-1} = \sum_{j=m}^{N} {}_t\sigma_j(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}.
\end{aligned}
$$

□

Seuraus 4.2. *Pätee, kaikilla* $m = 1, \dots, N$,

$$
\begin{cases}
A_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{[m]}(V) = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} A_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}(V), \\
A_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{\;m}(V) = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} A_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}(V),
\end{cases} \tag{4.9}
$$

$$
A_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{\;m}(K) = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} A_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}(K) \tag{4.10}
$$

ja

$$
\begin{cases}
\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{[m]} = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} \bar{a}_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|} \\
\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{\;m} = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} \bar{a}_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}.
\end{cases} \tag{4.11}
$$

Todistus. Lauseen 4.1 nojalla

$$
\begin{aligned}
A_{\overline{x_1\cdots x_N}:\overline{n}|}^{[m]}(V) &= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\,{}_np_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{[m]} \\
&= e^{-\int_0^n \delta(s)ds}\sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} {}_np_{x_{i_1}}\cdots {}_np_{x_{i_j}},
\end{aligned}
$$

josta (4.9):n ensimmäinen tulos seuraa. Toinen todistetaan samoin.

Mielivaltaiseen elinaikaan liittyville vakuutuksille pätee

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|}(K) &= \int_0^n \mu(x+t)e^{-\int_0^t\left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}dt \\
&= \Big/_0^n - e^{-\int_0^t\left(\delta(t)+\mu(x+s)\right)ds} - \int_0^n \delta(t)e^{-\int_0^t\left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}dt \\
&= 1 - A_{x:\overline{n}|}(V) - \int_0^n \delta(t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}{}_tp_x dt.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Nettokertamaksuun $A_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m}(K)$ liittyvä elinaika on

$$\tau(N-m+1) := (N-m+1).\ \text{kuoleman sattumishetki.}$$

Tätä vastaa elossaolotodennäköisyys

$$\mathbb{P}\big(\tau(N-m+1) > t\big) = {}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m}\,.$$

Tuloksen (4.12) nojalla

$$\begin{aligned}
A_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m}(K) &= 1 - A_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m}(V) - \int_0^n \delta(t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}{}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m}\,dt \\
&= 1 - \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} A_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}(V) \\
&\quad - \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N}\int_0^n \delta(t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}{}_tp_{x_{i_1}}\cdots{}_tp_{x_{i_j}}\,dt \\
&= 1 + \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le N} A_{x_{i_1}\cdots x_{i_j}:\overline{n}|}(K) - B,
\end{aligned}$$

missä

$$B = \sum_{j=m}^{N}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{j-m}\binom{N}{j} = 1$$

(4.6):n nojalla (annetaan $t \to 0+$, jolloin ${}_tp_{x_i} \to 1$, $\forall\, i$, ja siis ${}_t\sigma_j \to \binom{N}{j}$, ${}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m} \to 1$). Tästä seuraa (4.10).

Tarkastellaan (4.11):n jälkimmäistä yhtälöä. Eläkettä maksetaan aikavälillä

$$\big[0, \tau(N-m+1)\big] \cap [0,n].$$

Kyseessä on siis elinaikaan $\tau(N-m+1)$ kytketty eläke, joten

$$\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m} = \int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\underbrace{\mathbb{P}\big(\tau(N-m+1) > t\big)}_{{}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;m}}\,dt.$$

Tämä hajoaa lauseen 4.1 nojalla (4.11):n mukaiseksi summaksi.

Ensimmäisen yhtälön tulos seuraa tästä, sillä eläkettä maksetaa nyt aikavälillä

$$\big[\tau(N-m), \tau(N-m+1)\big] \cap [0,n].$$

Siis

$$\bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;[m]} = \bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m} - \bar{a}_{\overline{x_1\cdots x_N:n|}}^{\;m+1} = \int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s)ds}{}_tp_{\overline{x_1\cdots x_N}}^{\;[m]}\,dt.$$

□

Esimerkki 1. Oletetaan, että summa S maksetaan, kun x- ja y-ikäisestä jälkimmäinen kuolee edellyttäen, että tämä tapahtuu n seuraavan vuoden aikana. Olkoot jäljellä olevat elinajat $T(x)$ ja $T(y)$. Siis korvaus maksetaan hetkellä $\tau = \max(T(x), T(y))$, jos $\tau \leq n$. Nettokertamaksu on

$$SA_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\;1}(K) = S\big[A_{x:\overline{n}|}(K) + A_{y:\overline{n}|}(K) - A_{xy:\overline{n}|}(K)\big].$$

Esimerkki 2. Oletetaan, että eläkettä maksetaan jatkuvasti määrä $2e_2$, jos tasan kaksi henkilöä on elossa x-, y- ja z-ikäisen hengen ryhmässä ja määrä e_1, jos elossa on tasan yksi henkilö (siis $N = 3, n = \infty$). Nettokertamaksu on

$$\begin{aligned}
& 2e_2\bar{a}_{\overline{xyz}}^{[2]} + e_1\bar{a}_{\overline{xyz}}^{[1]} \\
= \; & 2e_2\big[\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz} - 3\bar{a}_{xyz}\big] + e_1\big[\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z - 2(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz}) + 3\bar{a}_{xyz}\big] \\
= \; & e_1(\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z) + 2(e_2 - e_1)(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz}) + (3e_1 - 6e_2)\bar{a}_{xyz}.
\end{aligned}$$

4.6.2 Yleiset usean vakuutetun eläkevakuutukset

Tarkastellaan nyt yleisiä jatkuvasti maksettavia usean hengen eläkkeitä. Olkoon $C_{j_1\cdots j_k}$ maksettavan eläkkeen kokonaismäärä aikayksikköä kohden, jos henkilöt $j_1, \ldots, j_k$ ovat elossa ja muut eivät. Hetkellä t maksettava eläkkeen määrä on tällöin

$$E_t = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq N \\ k=1,\ldots,N}} C_{j_1\cdots j_k}\mathbb{1}\big(T_{j_1} > t, \ldots, T_{j_k} > t, T_r \leq t, \forall r \notin \{j_1, \ldots, j_k\}\big) \tag{4.13}$$

Summassa on omegoittain korkeintaan yksi nollasta eroava termi. Kaavojen (4.7) ja (4.8) nojalla voidaan kirjoittaa

$$E_t = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq N \\ k=1,\ldots,N}} G_{j_1\cdots j_k}\mathbb{1}(T_{j_1\cdots j_k} > t), \tag{4.14}$$

missä $G_{j_1\cdots j_k} \in \mathbb{R}, \forall j_1, \ldots, j_k$. Joukossa

$$\omega \in \big\{T_{j_1} > t, \ldots, T_{j_k} > t, T_r \leq t, \forall r \notin \{j_1, \ldots, j_k\}\big\}$$

pätee

$$C_{j_1\cdots j_k} = \sum G_{q_1\cdots q_p}, \tag{4.15}$$

missä summaus ulotetaan yli kaikkien indeksiyhdistelmien $q_1, \ldots, q_p$, joilla

$$\{q_1, \ldots, q_p\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_k\}.$$

Kertoimet $G_{q_1\cdots q_p}$ määräytyvät yhtälöistä (4.15) yksikäsitteisesti. Yhtälö (4.14) pätee tällöin omegoittain. Nykyarvon odotusarvo antaa elinaikoja $T_{j_1\cdots j_k}$ vastaavia nettokertamaksuja. Tulevien korvausten nykyarvo on

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta(s)ds} E_t\,dt = \sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_k\le N \\ k=1,\ldots,N}} \int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta(s)ds} G_{j_1\cdots j_k} \mathbb{1}(T_{j_1\cdots j_k} > t)dt.$$

Eläkkeiden nettokertamaksu yhteensä on

$$\sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_k\le N \\ k=1,\ldots,N}} G_{j_1\cdots j_k} \bar{a}_{x_{j_1}\cdots x_{j_k}}.$$

Samoin käsitellään muut eläketyypit. Myös elämänvaravakuutukselle saadaan vastaava tulos.

Edellä $C_{j_1\cdots j_k}$ riippui vain osallisten elossaolosta. Jos esimerkiksi henkilön r eläkettä maksetaan korkeintaan n_r vuotta, korvataan T_r muuttujalla $\min(T_r, n_r)$ (vaikka tämä ei täytäkään elinajalle asetettuja teknisiä vaatimuksia). Elinaikoihin $T_{j_1\cdots j_k}$ tulee tällöin ylärajaksi n_r, jos $r \in \{j_1, \ldots, j_k\}$. Syntyy siis joukko määräaikaisia eläkkeitä. Jos rajoituksia on asetettu usealle eläkkeensaajalle, elinaikoihin $T_{j_1\cdots j_k}$ tulee ylärajaksi pienin $n_r, r \in \{j_1, \ldots, j_k\}$.

Esimerkki 1. Tarkastellaan kohdan 4.6.1 esimerkkiä 2. Nyt

$$C_x = C_y = C_z = e_1, C_{xy} = C_{xz} = C_{yz} = 2e_2, C_{xyz} = 0,$$

missä eläkkeensaajat on siis indeksoitu iällä. Saadaan yhtälöt

elossaolevat	
x	$e_1 = G_x$
y	$e_1 = G_y$
z	$e_1 = G_z$
xy	$2e_2 = G_x + G_y + G_{xy}$
xz	$2e_2 = G_x + G_z + G_{xz}$
yz	$2e_2 = G_y + G_z + G_{yz}$
xyz	$0 = G_x + G_y + G_z + G_{xy} + G_{xz} + G_{yz} + G_{xyz}.$

Ratkaisu on

$$\begin{aligned} G_x &= G_y = G_z = e_1 \\ G_{xy} &= G_{xz} = G_{yz} = 2(e_2 - e_1) \\ G_{xyz} &= 3e_1 - 6e_2 \end{aligned}$$

ja nettokertamaksuksi tulee

$$e_1(\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z) + 2(e_2 - e_1)(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz}) + (3e_1 - 6e_2)\bar{a}_{xyz}.$$

Lisälähteitä kohtaan 4.6: Milbrodt and Helbig (1999) ja Norberg (1998).

4.7 Sijoitussidonnaisesta vakuutuksesta

Aiemmissa tarkasteluissa elinaikaan sidotut korvaukset ovat sopimuksen mukaisia deterministisiä vakioita. Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa korvaus voisi olla esimerkiksi tietyn osakkeen arvo (tai hinta) korvaushetkellä. Tämä on luonnollista mallintaa satunnaismuuttujaksi.

Tarkastellaan kohdan 4 alun mukaista esimerkkiä. Korvaus maksetaan hetkellä k, jos kuolintapaus sattuu välillä $[k-1, k)$. Vakuutuskannassa on N vakuutettua, jotka kaikki ovat x-ikäisiä. Jäljellä olevat elinajat oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi. Kaikki vakuutussopimukset ovat samansisältöisiä ja kertamaksullisia. Vakuutuksen kesto on n vuotta.

4.7.1 Deterministiset korvaukset

Oletetaan, että korvaussumma on vakio S. Tarkastellaan siis samaa asetelmaa kuin kohdan 4 alussa. Kiinnitetään nyt kuitenkin huomio sijoitusriskiin.

Olkoon T geneerinen jäljellä olevaa elinaikaa kuvaava satunnaismuuttuja. Yksittäisen vakuutetun korvaukset ovat kuvattavissa satunnaisvektorilla

$$\begin{cases} \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ \xi_k = S\mathbb{1}(k-1 \leq T < k), \quad k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Vakuutettua j kuvaa vektori

$$\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Nämä ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ.

Olkoon korkoutuvuus yksinkertaisuuden vuoksi vakio $\delta > 0$ ja vakuutusmaksu

$$\begin{aligned} Q &= (1+\lambda) \sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta} \mathbb{E}(\xi_k) \\ &= (1+\lambda) \sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta} \, {}_{k-1}p_x \, q_{x+k-1}, \end{aligned}$$

missä $\lambda > 0$ on varmuuslisä. Mikäli hallussa oleva varallisuus talletetaan aina korkoutuvuutta δ vastaavalle tilille, riittävät vakuutusmaksut korvauksiin suurella todennäköisyydellä, kun N on suuri. Voidaan sanoa, että sopimuksiin sisältyvä riski on pystytty hajauttamaan.

Edellä esitetty pätee, jos korkoutuvuutta δ vastaava talletus on aina tehtävissä. Näin ei kuitenkaan välttämättä ole. Oletetaan, että talletuksille saadaankin eräs korkoutuvuus δ', missä

$$0 < \delta' < \delta.$$

Yhtiön varat hetkellä n ovat tällöin

$$U_n \doteq NQe^{n\delta'} - \sum_{k=1}^{n} e^{(n-k)\delta'} \sum_{j=1}^{N} \xi_k^j.$$

Nyt

$$\mathbb{P}(U_n \geq 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta'}\xi_k^j \leq NQ\right).$$

Suurten lukujen lain nojalla

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta'}\xi_k^j \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta'}\mathbb{E}(\xi_k) \quad \text{m.v,} \quad \text{kun } N \to \infty.$$

Siis

$$\mathbb{P}(U_n \geq 0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1, \text{ jos } Q > \sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta'}\mathbb{E}(\xi_k)$$

ja

$$\mathbb{P}(U_n \geq 0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ jos } Q < \sum_{k=1}^{n} e^{-k\delta'}\mathbb{E}(\xi_k).$$

Näkymät riippuvat siis parametrien λ, δ ja δ' suhteista. Jos δ' on pieni, ei hajautus hyödytä yhtiötä.

4.7.2 Arvopapereihin sidotut korvaukset

Oletetaan, että kuolintapauskorvaus on osakkeen tai jonkin muun markkinoilta helposti saatavan arvopaperin hinta korvaushetkellä. Merkitään tätä symbolilla S_k hetkellä k. Nykyhetken hinta S_0 on deterministinen ja S_k on satunnaismuuttuja, kun $k \geq 1$. Luonnollista on olettaa, että $S_0, S_1, \ldots$ ovat ei-negatiivisia ja että $S_0 > 0$. Olkoot $T, T_1, \ldots, T_N$ geneerinen ja vakuutettuja kuvaavat elinajat. Nämä oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi. Oletetaan myös, että $(S_1, \ldots, S_n)$ on riippumaton elinajoista.

Vakuutetun j korvaukset voidaan kuvata nyt satunnaisvektorilla

$$\begin{cases} \xi^j & = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j), \quad j = 1, \ldots, N \\ \xi_k^j & = S_k \mathbb{1}(k-1 \leq T_j < k), \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Nämä ovat samoin jakautuneita, mutta eivät ole riippumattomia. Vastaava geneerinen satunnaisvektori olkoon

$$\begin{cases} \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \\ \xi_k = S_k \mathbb{1}(k-1 \le T < k), \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Olkoon vakuutuksen kertamaksu R. Oletetaan, että yhtiö hankkii koko summalla korvauksen määrääviä arvopapereita ja maksaa korvaukset myymällä niitä. Hetkellä n yhtiöllä on hallussaan

$$K_n = \frac{NR}{S_0} - \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < n)$$

kappaletta arvopapereita. Varallisuus on ei-negatiivinen, jos ja vain jos $K_n \ge 0$. Tämän todennäköisyys on

$$\mathbb{P}(K_n \ge 0) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < n) \le \frac{R}{S_0} \right).$$

Tämä suppenee kohti ykköstä N:n kasvaessa, jos

$$R > S_0 \mathbb{P}(T < n) = S_0 \, {}_n q_x.$$

Oleellista on, että ehto ei riipu korvauksen perustana olevan arvopaperin hintakehityksestä. Tästä näkökulmasta katsottuna sijoitusriski on siirtynyt vakuutetulle. Voidaan myös sanoa, että yhtiö on pystynyt hajauttamaan riskin sopivan sijoitusstrategian avulla. Vakuutuksen tasapuolinen nettokertamaksu on

$$S_0 \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(k-1 \le T < k) \right) = S_0 \, {}_n q_x.$$

Tarkasteellaan nyt yhdistettyä vakuutusta, jossa korvataan S_k, jos kuolintapaus sattuu välillä $[k-1, k)$ ja S_n, jos vakuutettu elää hetkellä n. Tällöin yhtiöllä ei ole mitään riskiä, jos vakuutusmaksu on S_0. Tällä nimittäin voidaan hankkia tarkasteltava arvopaperi. Korvaus tulee aikanaan maksettavaksi, mutta siitä yhtiö selviää myymällä hankkimansa osakkeen.

Edellä esitetyt tarkastelut osoittavat, että sijoitussidonnaisen vakuutuksen tapauksessa on luonnollista sijoittaa vakuutusmaksu korvauksia vastaaviin arvopapereihin. Tarkastellaan asiaa vielä esimerkkien valossa.

Esimerkki 1. Yhtiöllä on hetkellä nolla N vakuutusta, joista kustakin maksetaan vuoden kuluttua määrä S_1, mikäli vakuutettu ei ole tällöin elossa. Korvaus S_1 on erään osakkeen hinta hetkellä yksi. Olkoon osakkeen hinta hetkellä nolla $S_0 = 1$ ja

$$\mathbb{P}(S_1 = 1.1) = 0.8, \qquad \mathbb{P}(S_1 = 0.9) = 0.2.$$

Kukin vakuutettu maksaa hetkellä nolla kertamaksun $P = 0.01$. Elinajat ovat toisistaan riippumattomia ja jokaisen vakuutetun kuolintodennäköisyys vuoden aikana on $q = 0.01$. Elinajat ovat lisäksi riippumattomia arvopaperin hinnasta S_1.

Yhtiöllä on hallussaan hetkellä nolla alkupääomaa määrä U_0. Yhtiö sijoittaa tämän ja saamansa vakuutusmaksut vuodeksi pankkitilille. Olkoon korkoutuvuus vakio δ ja yhtiön varallisuus hetkellä yksi U_1 .

Kiinnitetään $\delta = 0.05,\ N = 10000$ ja $U_0 = 15$ ja arvioidaan vararikkotodennäköisyyttä $\mathbb{P}(U_1 < 0)$.

Olkoon T_j vakuutetun j jäljellä oleva elinaika kuten aiemminkin. Kokonaiskorvaus on

$$S_1 \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < 1)$$

ja varallisuus vuoden kuluttua

$$U_1 = e^{\delta}(U_0 + NP) - S_1 \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < 1).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(U_1 < 0) = \mathbb{P}(S_1 = 1.1)\mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 1.1) + \mathbb{P}(S_1 = 0.9)\mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 0.9).$$

Edelleen

$$\mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 1.1) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < 1) > \frac{e^{\delta}(U_0 + NP)}{1.1}\right).$$

Merkitään

$$Y_N = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}(T_j < 1) \quad \text{ja} \quad a = \frac{e^{\delta}(U_0 + NP)}{1.1}.$$

Keskeisen raja-arvolauseen soveltaminen summaan Y_N on perusteltua. Selvästi

$$\begin{cases} \mu \doteq \mathbb{E}\big(\mathbb{1}(T_j < 1)\big) = q = 0.01, \\ \sigma^2 \doteq \mathrm{Var}\big(\mathbb{1}(T_j < 1)\big) = \mu(1 - \mu). \end{cases}$$

Saadaan arvio

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 1.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} > \frac{a - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{a - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right) \approx 1 - \Phi(0.996) \approx 0.159. \end{aligned}$$

Vastaavasti $\mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 0.9) \approx 1 - \Phi(3.45) \approx 0$, joten $\mathbb{P}(U_1 < 0) \approx 0.127$.

Esimerkki 2. Olkoon asetelma sama kuin edellisessä esimerkissä, mutta nyt yhtiö sijoittaa saamansa vakuutusmaksut kyseiseen osakkeeseen ja alkupääoman U_0 pankkiin korkoutuvuudella δ.

Nyt

$$U_1 = e^{\delta} U_0 + S_1(NP - Y_N).$$

Keskeinen raja-arvolause antaa approksimaatiot

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 1.1) &\approx 1 - \Phi(1.44) \approx 0.074,\\ \mathbb{P}(U_1 < 0 \,|\, S_1 = 0.9) &\approx 1 - \Phi(1.76) \approx 0.039,\end{aligned}$$

joten $\mathbb{P}(U_1 < 0) \approx 0.068$.

Yhtiö on pystynyt pienentämään vararikkotodennäköisyyttä merkittävästi luonnollisella sijoitusstrategialla.

Lisälähde kohtaan 4.7: Möller (2000).

5 Vastuuvelasta

Hinnoittelu luvussa 4 toteutettiin siten, että asianmukaisesti diskontattujen vakuutusmaksujen ja korvausten tulee yhtyä odotusarvotasolla *koko* sopimuskauden osalta. Yleensä vastaava ei päde sopimuskauden osille. Korostuneesti tämä tulee esille kertamaksuisessa vakuutuksessa.

Tyypillisesti vakuutusmaksut ovat etupainoitteisia. Sopimuskauden alkuosalla kertyneet vakuutusmaksut ylittävät edellä tarkoitetussa mielessä korvaukset. Sopimuskauden loppuosalla asia on päinvastoin. Vakuutusmaksun ollessa vakiosuuruinen koko sopimuskauden on tilanne kuolemanvaravakuutuksessa kuvan 5.1 kaltainen. Kuvassa korko on oletettu nollaksi. Hetkellä t vakuutettu on oikeutettu korvauksiin, jotka keskimääräisellä tasollaan ylittävät tulevat vakuutusmaksut. Yhtiön tulee olla varautunut tähän. Käytännössä tämä toteutetaan siten, että tulevien korvausten ja vakuutusmaksujen nykyarvojen erotuksen odotusarvo kirjataan velaksi.

Kyse on *vastuuvelasta* (tässä tapauksessa *vakuutusmaksuvastuusta*, koska vakuutetun oletetaan olevan elossa hetkellä t). Periaate on kirjattu lakiin. *Vastuuvelka määritellään tulevien korvausten ja vakuutusmaksujen erotuksen nykyarvon odotusarvoksi* (vaihtoehtoista terminologiaa: vastuuvelka on tulevien korvausten pääoma-arvo vähennettynä tulevien vakuutusmaksujen pääoma-arvolla).

Matemaattisesti on usein luontevaa puhua ehdollisesta odotusarvosta. Ehdollistus tapahtuu yksinkertaisissa sopimuksissa indikaattorin $\mathbb{1}(T > t)$ suhteen hetkellä t. Jos $T \leq t$, on vastuuvelka nolla perusvakuutuksissa. Seuraavassa symboli $V(t)$ tarkoittaa elossa olevan vakuutetun vastuuvelkaa hetkellä t.

5.1 Esimerkki

Olkoon kuolemanvaravakuutus tehty iässä x ja olkoon korvaus kuolintapauksessa S. Oletetaan, että vakuutuskausi on n vuotta ja että vakuutusmaksuja maksetaan tasaerinä vuosittain etukäteen h vuotta. Olkoon korkoutuvuus δ vakio. Vuosimaksu on

$$P^{(1)} = S \cdot \frac{A_{x:\overline{n}|}(K)}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

(kohdat 4.2 ja 4.5). Tarkastellaan vastuuvelkaa vuoden kuluttua eli hetkellä 1.

Jos vakuutettu on kuollut ensimmäisen vuoden aikana, ovat sekä tulevat korvaukset että vakuutusmaksut nollia. Vastuuvelkaa ei siis ole (tässä oletetaan, että syntynyt korvaus S on ehditty maksaa; ellei näin olisi, olisi vastuuvelka yhtä kuin S *korvausvastuuta*). Jos vakuutettu on elossa, on tulevien korvausten nykyarvon odotusarvo (ehdollinen odotusarvo ehdolla 'elossa')

$$S \cdot A_{x+1:\overline{n-1}|}(K) \tag{5.1}$$

kohdan 4.2 nojalla. Tulevien vakuutusmaksujen nykyarvon odotusarvo taas on

$$P^{(1)}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|} \tag{5.2}$$

Tarkastelu tapahtuu juuri ennen 2. vakuutusmaksun suorittamista. Näin ollen vastuuvelka on

$$V(1) = S \cdot A_{x+1:\overline{n-1}|}(K) - P^{(1)}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}\,. \tag{5.3}$$

Vastuuvelka hetkellä nolla on $V(0) = 0$, koska $P^{(1)}$ on mitoitettu ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Tässä vastuuvelka on määrätty juuri ennen 1. vakuutusmaksun suorittamista.

Ilmeisesti yleisesti

$$V(k) = S \cdot A_{x+k:\overline{n-k}|}(K) - P^{(1)}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, h-1. \tag{5.4}$$

Tämä pätee myös, kun $k = 0$. Samoin nähdään, että

$$V(k) = S \cdot A_{x+k:\overline{n-k}|}(K), \quad k = h, \ldots, n, \tag{5.5}$$

missä luonnollisesti $V(n) = 0$.

Jatkossa oletetaan mukavuussyistä, että vakuutusmaksuja maksetaan jatkuvasti. Esimerkin vastuuvelka ennen hetkeä h on tällöin

$$V(k) = S \cdot A_{x+k:\overline{n-k}|}(K) - \bar{P}\bar{a}_{x+k:\overline{h-k}|}\,. \tag{5.6}$$

Siirtyminen diskreettiin vakuutussopimuksen mukaiseen tarkempaan laskentaan on tarvittaessa aina tehtävissä.

Jos korkoutuvuus ei ole vakio, on esimerkiksi kaavan (5.6) merkinnöissä oltava tarkkana. Tulkinta on

$$V(k) = S \int_k^n e^{-\int_k^t \delta(s)ds} \mu(x+t)\,{}_{t-k}p_{x+k}\,dt - \bar{P} \int_k^h e^{-\int_k^t \delta(s)ds}\,{}_{t-k}p_{x+k}\,dt$$

Korkoutuvuus on siis hetken k mukainen.

5.2 Retrospektiivinen ja prospektiivinen laskenta

Tarkastellaan vakuutusta, jossa kuolinhetkellä $T = T(x)$ suoritetaan korvaus $S(T)$. Oletetaan, että S on jatkuva funktio. Vakuutuskausi olkoon n vuotta ja maksuaika $h \leq n$. Vakuutusmaksuja suoritetaan jatkuvasti ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\bar{P}$ ja vakuutettu on alussa x-ikäinen.

Olkoon $t \in (0, h)$. Elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä t on

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^{T(x+t)+t} \delta(s)ds} S\big(T(x+t)+t\big)\mathbb{1}\big(T(x+t) \leq n-t\big)\right] \\
&\qquad - \mathbb{E}\left[\int_t^h e^{-\int_t^u \delta(s)ds} \bar{P}\mathbb{1}\big(T(x+t) > u-t\big)du\right] \\
&= \int_t^n \mu(x+u)_{u-t}p_{x+t}\, e^{-\int_t^u \delta(s)ds} S(u)du - \bar{P}\int_t^h {}_{u-t}p_{x+t}\, e^{-\int_t^u \delta(s)ds} du.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Ekvivalenssiperiaate antaa toisaalta ehdon $V(0) = 0$. Tästä saadaan

$$
\begin{aligned}
-\int_0^t \mu(x+u)_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} S(u)du + \bar{P}\int_0^t {}_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du& \\
= \int_t^n \mu(x+u)_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} S(u)du - \bar{P}\int_t^h {}_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du&.
\end{aligned}
$$

Oikea puoli on edelleen

$$
{}_t p_x\, e^{-\int_0^t \delta(s)ds}\left[\int_t^n \mu(x+u)_{u-t}p_{x+t}\, e^{-\int_t^u \delta(s)ds} S(u)du - \bar{P}\int_t^h {}_{u-t}p_{x+t}\, e^{-\int_t^u \delta(s)ds} du\right].
$$

Nähdään, että

$$
V(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\left[\bar{P}\int_0^t {}_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du - \int_0^t \mu(x+u)_u p_x\, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} S(u)du\right].
$$

Tätä kutsutaan *retrospektiiviseksi* laskentatavaksi. Se saadan 'korkouttamalla' keskimääräinen kertynyt ylijäämä hetkeen t. Luonnollista on, että tällä on yhteys vastuuvelkaan. Kaavan (5.7) laskentatapaa kutsutaan *prospektiiviseksi* (tulevaisuuteen perustuva laskenta). Todetaan vielä, että jos δ on vakio, niin 'korkoutus' tapahtuu kertoimella

$$
e^{\int_0^t \left(\delta+\mu(x+s)\right)ds} = \frac{D_x}{D_{x+t}}
$$

kohdan 4.4 merkinnöin. Retrospektiivinen vastuuvelka on tällöin

$$
V^R(t) := \frac{D_x}{D_{x+t}}\left[\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \mathbb{E}\Big(e^{-\delta T(x)} S\big(T(x)\big)\mathbb{1}\big(T(x) \leq t\big)\Big)\right].
$$

Hetkellä $t \in [h, n)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka on

$$
V(t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^{T(x+t)+t} \delta(s)ds} S\big(T(x+t)+t\big)\mathbb{1}\big(T(x+t) \leq n-t\big)\right].
$$

Retrospektiivinen laskutapa on

$$V^R(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \left[\bar{P} \int_0^h {}_u p_x \, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du - \int_0^t \mu(x+u)_u p_x \, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} S(u) du \right].$$

Jos korkoutuvuus on vakio, niin

$$V^R(t) = \frac{D_x}{D_{x+t}} \Big[\bar{P} \bar{a}_{x:\overline{h}|} - \mathbb{E}\Big(e^{-\delta T(x)} S\big(T(x)\big) \mathbb{1}\big(T(x) \le t\big) \Big) \Big].$$

Edelleen pätee

$$V(t) = V^R(t).$$

Tarkastellaan nyt kohdan 4.1 mukaista elämänvaravakuutusta. Oletetaan, että vakuutusmaksua maksetaan ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\bar{P}$ aikavälillä $t \in [0, h]$, missä $h \le n$. Vakuutettu on alussa x-ikäinen.

Jos $t \in [0, h]$, niin elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka on

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^n \delta(s)ds} S \mathbb{1}\big(T(x+t) > n-t\big) \right] - \mathbb{E}\left[\int_t^h e^{-\int_t^u \delta(s)ds} \bar{P} \mathbb{1}\big(T(x+t) > u-t\big) du \right] \\ &= S \, {}_{n-t}p_{x+t} e^{-\int_t^n \delta(s)ds} - \bar{P} \int_t^h {}_{u-t}p_{x+t} \, e^{-\int_t^u \delta(s)ds} du. \end{aligned}$$

Retrospektiivinen laskentatapa on nyt

$$V^R(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \bar{P} \int_0^t {}_u p_x \, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du.$$

Jos $t \in (h, n)$, niin

$$V(t) = \mathbb{E}\Big[e^{-\int_t^n \delta(s)ds} S \mathbb{1}\big(T(x+t) > n-t\big) \Big]$$

ja

$$V^R(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \bar{P} \int_0^h {}_u p_x \, e^{-\int_0^u \delta(s)ds} du.$$

Kummassakin tapauksessa $V(t) = V^R(t)$.

Tarkastellaan vielä kohdan 4.3 mukaista ikuista vanhuuseläkettä. Vakuutettu on siis x-ikäinen ja eläke alkaa n vuoden kuluttua. Oletetaan, että vakuutus on kertamaksuinen ja että eläkettä maksetaan jatkuvasti intensiteetillä $\bar{S}$.

Olkoon $t \in (0, n]$. Elossa olevan vakuutetun vastuuvelka on

$$V(t) = \bar{S} \int_n^\infty e^{-\int_t^u \delta(s)ds} {}_{u-t}p_{x+t} \, du = \bar{S} \int_n^\infty e^{-\int_t^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} du.$$

Retrospektiivinen laskutapa saadaan lähtemällä yhtälöstä $V(0) = 0$, missä vastuuvelka määrätään juuri ennen vakuutusmaksun suorittamista. Jos kertamaksu on P, niin

$$\begin{aligned}
0 = V(0) &= \bar{S} \int_n^\infty e^{-\int_0^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} du - P \\
&= \bar{S} e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \int_n^\infty e^{-\int_t^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} du - P \\
&= e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} V(t) - P.
\end{aligned}$$

Määritellään retrospektiivinen laskutapa asettamalla

$$V^R(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} P.$$

Edellä esitetyn nojalla $V(t) = V^R(t)$.

5.3 Thielen yhtälö

Luvussa 2.5 tarkasteltiin jatkuvia kassavirtoja ja todettiin, että kertyviä talletuksia ja lainan määriä voitiin kuvata differentiaaliyhtälöillä. Osoittautuu, että vastuuvelkaa voidaan kuvata analogisella tavalla, niin kutsutun *Thielen (differentiaali)yhtälön* avulla.

Tarkastellaan johdannoksi tavallista kuolemanvaravakuutusta. Olkoon kuolintapauskorvaus S vakio, vakuutuskausi n vuotta, vakuutettu x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä ja kuolevuus ja korkoutuvuus jatkuvia funktioita. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ koko vakuutuskauden ajan.

Olkoon $V(t)$ elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä t. Merkitään

$$V_1(t) = S \int_t^n \mu(x+u) e^{-\int_t^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} du$$

ja

$$V_2(t) = \bar{P} \int_t^n e^{-\int_t^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} du.$$

Tällöin

$$V(t) = V_1(t) - V_2(t).$$

Siis V_1 koskee tulevia korvauksia ja V_2 vakuutusmaksuja.

Derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
V_1'(t) &= -S\mu(x+t) + S \int_t^n \mu(x+u) e^{-\int_t^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds} \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big) du \\
&= -S\mu(x+t) + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big) V_1(t)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V_2'(t) &= -\bar{P} + \bar{P}\int_t^n e^{-\int_t^n \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\big(\delta(t)+\mu(x+t)\big)du \\ &= -\bar{P} + \big(\delta(t)+\mu(x+t)\big)V_2(t). \end{aligned}$$

Siis

$$V'(t) = -S\mu(x+t) + \bar{P} + \big(\delta(t)+\mu(x+t)\big)V(t). \tag{5.8}$$

Alkuehtona on $V(0+) = 0$. Lisäksi ilmeisesti $V(n-) = 0$. Yhtälö (5.8) on vakuutuksen vastuuvelkaa kuvaava Thielen yhtälö. Tulkinta on mukavampi tehdä muodossa

$$dV(t) = V(t+dt) - V(t) = \big(-S\mu(x+t)+\bar{P}\big)dt + \big(\delta(t)+\mu(x+t)\big)V(t)dt.$$

Elossa olevan vakuutetun vastuuvelan lisäys rahoitetaan siis keskimääräisellä vakuutusmaksujen ja korvausten erotuksella $\bar{P} - S\mu(x+t)$, korkotuotolla $\delta(t)V(t)$ sekä aikavälillä $[t, t+dt)$ kuolleiden vastuuvelalla $\mu(x+t)V(t)$.

Tavallista on myös kirjoittaa

$$dV(t) = \bar{P}dt - R(t)\mu(x+t)dt + \delta(t)V(t)dt,$$

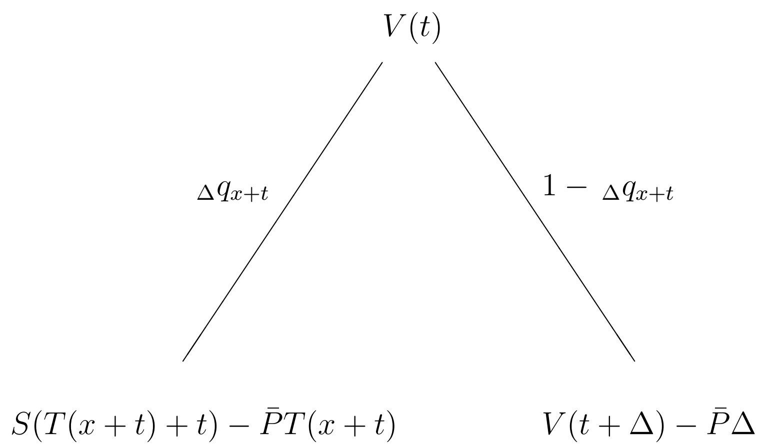
missä

$$R(t) = S - V(t)$$

on *riskisumma*. Tämä vastaa kuolintapaushetkellä syntyvää kokonaiskulua: yhtiö suorittaa korvauksen S ja vapautuu velasta $V(t)$.

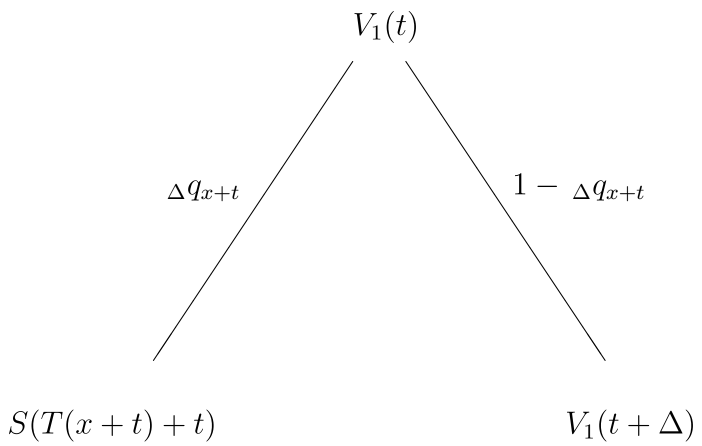
Vastuuvelan määritelmä antaa suoran tavan muodostaa Thielen yhtälö. Tarkastellaan yleistä kuolemanvaravakuutusta, jossa korvaus kuolinhetkelä $T = T(x)$ on $S(T)$. Oletetaan, että S, μ ja δ ovat jatkuvia funktioita. Olkoon vakuutuskauden pituus n ja maksuaika h. Vakuutusmaksuja maksetaan jatkuvasti intensiteetilä $\bar{P}$ maksuaikana $t \in [0, h]$.

Olkoon $t \in (0, h)$ ja $\Delta > 0$. Hetkellä $t + \Delta$ asia näyttää seuraavalta:



Vasen haara kuvaa tilannetta, jossa vakuutettu on kuollut välillä $[t, t+\Delta)$. Tämä tapahtuu todennäköisyydellä ${}_{\Delta}q_{x+t}$. Toteutunut kassavirta on kaavion mukainen. Oikea haara kuvaa tilannetta, jossa vakuutettu on elossa hetkellä $t+\Delta$. Toteutunut kassavirta on $\bar{P}\Delta$. Myöhemmät vastuuvelkaan $V(t)$ kuuluvat tapahtumat sisältyvät vastuuvelkaan $V(t+\Delta)$. Kaavion kassavirtoja ei ole diskontattu. Vastuuvelat on diskontattu, mutta eri ajanhetkiin.

Olkoon kuten aiemminkin $V_1(t)$ tulevien korvausten pääoma-arvo ja $V_2(t)$ tulevien vakuutusmaksujen pääoma-arvo. Siis $V(t) = V_1(t) - V_2(t)$. Korvauksia kuvaa kaavio



Suoraan määritelmästä seuraa (oletetaan, että $t+\Delta < n$)

$$\begin{aligned} V_1(t) = \mathbb{P}\big(T(x+t) \leq \Delta\big)\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^{T(x+t)+t}\delta(s)ds} S\big(T(x+t)+t\big) \,\middle|\, T(x+t) \leq \Delta\right] \\ + \mathbb{P}\big(T(x+t) > \Delta\big)\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds} V_1(t+\Delta) \,\middle|\, T(x+t) > \Delta\right]. \end{aligned}$$

Joukossa $\{T(x+t) \leq \Delta\}$ pätee

$$\begin{aligned} & e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds} \min\{S(u) \mid t \leq u \leq t+\Delta\} \\ & \leq e^{-\int_t^{T(x+t)+t}\delta(s)ds} S\big(T(x+t)+t\big) \\ & \leq \max\{S(u) \mid t \leq u \leq t+\Delta\}. \end{aligned}$$

Koska S ja δ ovat jatkuvia, niin

$$E\left[e^{-\int_t^{T(x+t)+t}\delta(s)ds} S\big(T(x+t)+t\big) \,\middle|\, T(x+t) \leq \Delta\right] = S(t) + o(1),$$

kun $\Delta \to 0+$. Toisaalta

$$\begin{aligned}
e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds}V_1(t+\Delta) &= e^{-\delta(t)\Delta+o(1)\Delta}V_1(t+\Delta)\\
&= \big(1-\delta(t)\Delta+o(1)\Delta\big)V_1(t+\Delta)\\
&= V_1(t+\Delta)-\delta(t)V_1(t+\Delta)\Delta+o(1)\Delta\\
&= V_1(t+\Delta)-\delta(t)V_1(t)\Delta+o(1)\Delta, \qquad \Delta\to 0+,
\end{aligned}$$

sillä ilmeisesti V_1 on jatkuva.

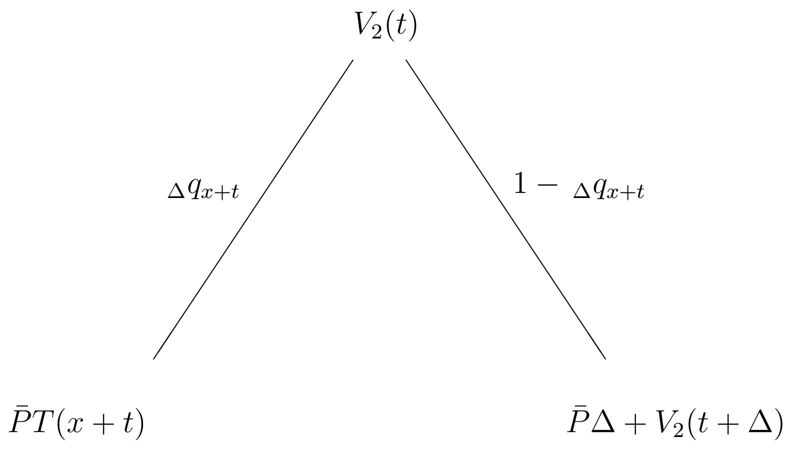
Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= {}_{\Delta}q_{x+t}\big(S(t)+o(1)\big)+(1-{}_{\Delta}q_{x+t})\big(V_1(t+\Delta)-\delta(t)V_1(t)\Delta+o(1)\Delta\big)\\
&= \mu(x+t)S(t)\Delta+V_1(t+\Delta)-\delta(t)V_1(t)\Delta-\mu(x+t)V_1(t)\Delta+o(1)\Delta\\
&= V_1(t+\Delta)+\mu(x+t)S(t)\Delta-\big(\delta(t)+\mu(x+t)\big)V_1(t)\Delta+o(1)\Delta
\end{aligned}$$

ja edelleen

$$V_1'(t) = -\mu(x+t)S(t)+\big(\delta+\mu(x+t)\big)V_1(t). \tag{5.9}$$

Vakuutusmaksuja kuvaa kaavio



Siis

$$\begin{aligned}
V_2(t) &= \mathbb{P}\big(T(x+t)\le\Delta\big)\mathbb{E}\left(\int_t^{T(x+t)+t} e^{-\int_t^u\delta(s)ds}\bar{P}du \,\Big|\, T(x+t)\le\Delta\right)\\
&\quad+\mathbb{P}\big(T(x+t)>\Delta\big)\mathbb{E}\left(\int_t^{t+\Delta} e^{-\int_t^u\delta(s)ds}\bar{P}du+e^{-\int_t^{t+\Delta}\delta(s)ds}V_2(t+\Delta)\,\Big|\, T(x+t)>\Delta\right).
\end{aligned}$$

Ensimmäinen summattava on ilmeisesti $o(1)\Delta$, joten

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \big(1 - \mu(x+t)\Delta + o(1)\Delta\big)\Big(\bar{P}\Delta + \big(1 - \delta(t)\Delta\big)V_2(t+\Delta) + o(1)\Delta\Big) + o(1)\Delta \\ &= \big(1 - \mu(x+t)\Delta\big)\big(V_2(t+\Delta) + \bar{P}\Delta - \delta(t)V_2(t)\Delta\big) + o(1)\Delta \\ &= V_2(t+\Delta) + \bar{P}\Delta - \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V_2(t)\Delta + o(1)\Delta \end{aligned}$$

ja edelleen

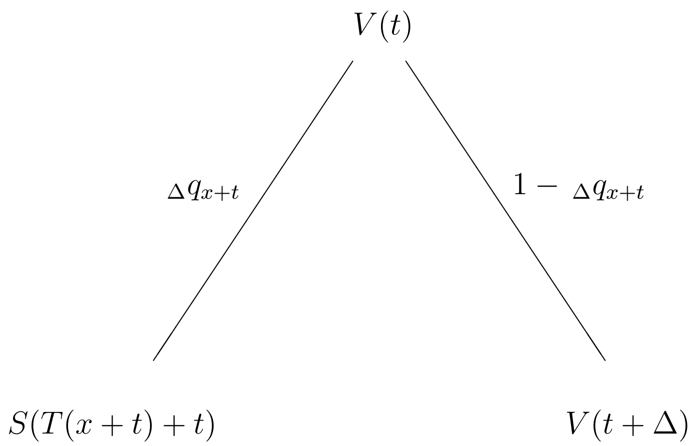
$$V_2'(t) = -\bar{P} + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V_2(t). \tag{5.10}$$

Yhdistämällä (5.9) ja (5.10) saadaan lopulta

$$\begin{aligned} V'(t) &= V_1'(t) - V_2'(t) \\ &= -\mu(x+t)S(t) + \bar{P} + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)\big(V_1(t) - V_2(t)\big) \\ &= -\mu(x+t)S(t) + \bar{P} + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tämä on (5.8) tapauksessa $S(t) \equiv S$.

Välillä $t \in (h, n)$ kaavio on



Siis

$$\begin{aligned} V(t) &\approx {}_\Delta q_{x+t}S(t) + (1 - {}_\Delta q_{x+t})e^{-\delta(t)\Delta}V(t+\Delta) \\ &\approx \mu(x+t)S(t)\Delta + V(t+\Delta) - \big({}_\Delta q_{x+t} + \delta(t)\Delta\big)\big)V(t) \\ &\approx V(t+\Delta) + \mu(x+t)S(t)\Delta - \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t)\Delta, \end{aligned}$$

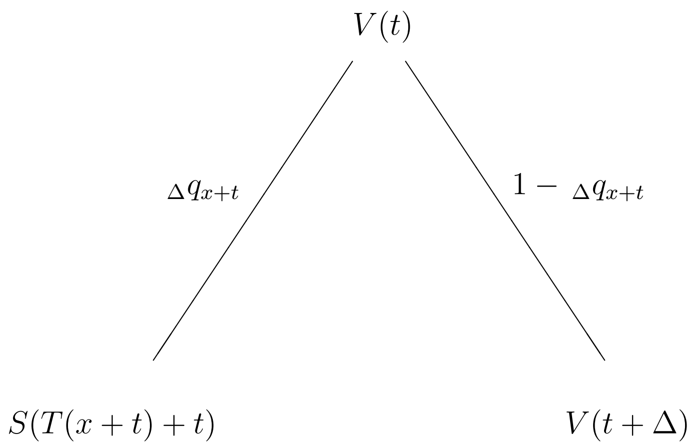
joten

$$V'(t) = -\mu(x+t)S(t) + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t). \tag{5.12}$$

Reunaehtoina ovat $V(0+) = 0, V(n-) = 0$. Lisäksi pisteessä $t = h$ vastuuvelka on jatkuva (kuten muuallakin).

Vakuutus olisi voitu hinnoitella lähtien liikkeelle edellä johdetuista differentiaaliyhtälöistä ja reunaehdoista. Reunaehtoja on nimittäin yksi ylimääräinen, mikä antaa mahdollisuuden ekvivalenssiperiaatteen mukaisen intensiteetin $\bar{P}$ määräämiseen.

Asian havainnollistamiseksi määrätään vakuutuksen nettokertamaksu P. Kaavio on nyt kaikilla $t \in (0, n)$,



Thielen yhtälö on

$$V'(t) = -\mu(x+t)S(t) + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t).$$

Tämä on yhtäpitävä yhtälön

$$\begin{aligned} &e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\big[V'(t) - \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t)\big] \\ &= -e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\mu(x+t)S(t) \end{aligned} \tag{5.13}$$

kanssa. Olkoon

$$W(t) = e^{-\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}V(t).$$

Yhtälön (5.13) vasen puoli on $W'(t)$, joten

$$W(t) = -\int_0^t e^{-\int_0^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\mu(x+u)S(u)du + C,$$

missä C on vakio. Siispä

$$V(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\left[-\int_0^t e^{-\int_0^u \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\mu(x+u)S(u)du + C\right].$$

Koska $V(n-) = 0$, on

$$C = \int_0^n e^{-\int_0^u \big(\delta(s)+\mu(x+s)\big)ds} \mu(x+u)S(u)du.$$

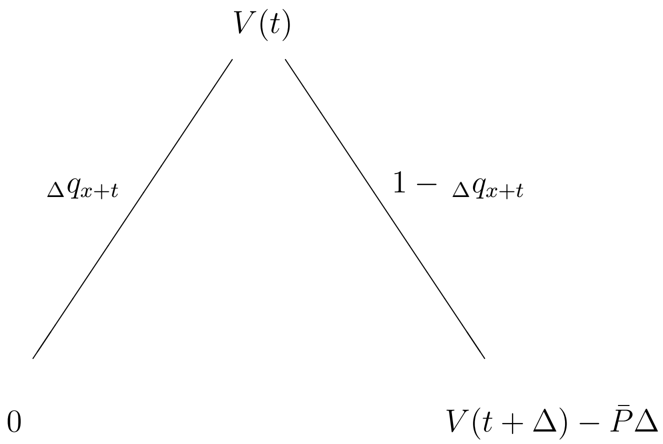
Ekvivalenssiperiaate ja vastuuvelan määritelmä antavat

$$P = V(0+) = C,$$

kuten pitääkin.

Johdetaan seuraavassa Thielen yhtälöt eräille vakuutussopimuksille.

1) Elämänvaravakuutus. Hetkellä n maksetaan summa S, jos vakuutettu on tällöin elossa. Vakuutettu on x-ikäinen ja maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ koko vakuutuskauden ajan. Kaavio on (hieman yksinkertaistettuna)



Siis

$$\begin{aligned} V(t) &\approx e^{-\delta(t)\Delta}\big[V(t+\Delta) - \bar{P}\Delta\big](1 - {}_{\Delta}q_{x+t}) \\ &\approx \big(V(t+\Delta) - \delta(t)V(t)\Delta - \bar{P}\Delta\big)\big(1 - \mu(x+t)\Delta\big). \end{aligned}$$

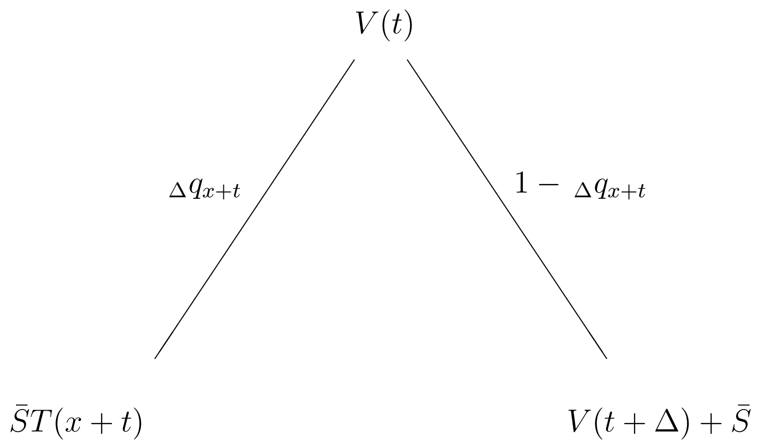
Thielen yhtälö on

$$V'(t) = \bar{P} + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t). \tag{5.14}$$

Reunaehdot ovat $V(0+) = 0$ ja $V(n-) = S$.

2) Vanhuuseläke. Hetkestä n lähtien maksetaan jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}$ niin kauan, kuin vakuutettu on elossa. Vakuutettu on x-ikäinen ja maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ aikavälillä $[0, n]$.

   Kaavio on sama kuin elämänvaravakuutuksessa välillä $t \in (0, n)$. Thielen yhtälö on siis (5.14) alkuehdolla $V(0+) = 0$. Alueessa $t > n$ saadaan kaavio



   Siis

$$\begin{aligned} V(t) &\approx \mu(x+t)\Delta\bar{S}\Delta + \big(V(t+\Delta) - \delta(t)V(t)\Delta + \bar{S}\Delta\big)\big(1 - \mu(x+t)\Delta\big) \\ &\approx V(t+\Delta) - \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t)\Delta + \bar{S}\Delta. \end{aligned}$$

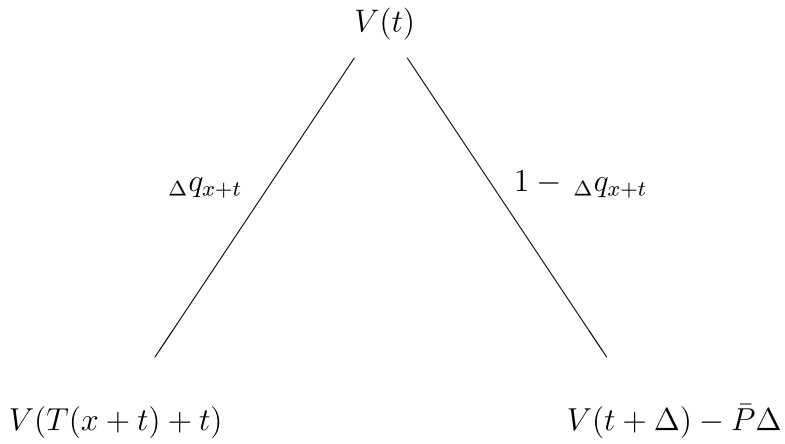
   Thielen yhtälö on

$$V'(t) = \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t) - \bar{S}.$$

   Alkuehto saadaan jatkuvuusvaatimuksesta pisteessä $t = n$.

3) Vastuuvelasta riippuvat korvaukset. Vakuutettu Vakuutettu on x-ikäinen ja maksaa vakuutusmaksuja jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ niin kauan, kuin on elossa. Kuolinhetkellä yhtiö korvaa syntyneen säästön. Tällä tarkoitetaan vastuuvelkaa juuri ennen kuolinhetkeä. Mikä on korvaussumma, jos kuolinhetki on $T(x) = t$?

   Vastuuvelkaa kuvaa kaavio



Siis

$$\begin{aligned} V(t) &\approx \mu(x+t)\Delta V(t) + \big(1 - \mu(x+t)\Delta\big)\big(V(t+\Delta) - \delta(t)V(t)\Delta - \bar{P}\Delta\big) \\ &\approx \mu(x+t)V(t)\Delta + V(t+\Delta) - \big(\mu(x+t) + \delta(t)\big)V(t)\Delta - \bar{P}\Delta \end{aligned}$$

ja

$$V'(t) = \delta(t)V(t) + \bar{P}.$$

Ratkaisu alkuehdolla $V(0+) = 0$ on

$$V(t) = \bar{P}\int_0^t e^{\int_u^t \delta(s)ds} du$$

eli vakuutusmaksut korkoutettuna hetkeen t. Sopimuksen kuolintapauskorvaus on siis

$$S(t) = \bar{P}\int_0^t e^{\int_u^t \delta(s)ds} du.$$

Tämä maksetaan kuolinhetkellä.

Lisälähde kohtaan 5: Norberg (1991).

6 Bruttovakuutusmaksut

Korvausten lisäksi vakuutussopimuksista aiheutuu yhtiölle liikekuluja, esimerkiksi palkka- ja materiaalikuluja. Näitä vastaava erä tulee sisällyttää vakuutusmaksuun. Erää kutsutaan *kuormitukseksi* (tai liikekulukuormitukseksi, hallintokulukuormitukseksi). Kuormituksen ja nettomaksun summaa kutsutaan *bruttomaksuksi* tai *bruttovakuutusmaksuksi*. Vakuutusmaksua oletetaan seuraavassa suoritettavan jatkuvasti. Bruttomaksu aikayksikköä kohden olkoon $\bar{B}$. Tätä kutsutaan myös *bruttomaksuintensiteetiksi*

Yhtiölle syntyy liikekuluja esimerkiksi vakuutuksen perustamisesta (mukaan lukien hankintakustannukset), vakuutusmaksujen perimisestä, korvausten maksamisesta, jne. Todetaan, että myös liikekuluja syntyy koko sopimuskaudella ja että ne riippuvat vakuutetun jäljellä olevasta elinajasta.

Kuormitusmallin avulla kuormitus suhteutetaan sopiviksi katsottuihin elementteihin. Esimerkiksi

$\kappa\bar{B}$	maksuun suhteutettu kuormitus
εS	korvaukseen suhteutettu kuormitus
$\gamma V(t)$	vastuuvelkaan suhteutettu kuormitus
I	kiinteä kuormitus, jolla katetaan vakuutuksen perustamiskustannukset
$\phi\mu(x+t)S$	riskiin suhteutettu kuormitus.

Seuraavassa oletetaan, että kuormitusmalli vastaa tasoltaan riittävällä tarkkuudella kunakin hetkenä syntyviä todellisia kustannuksia. Hinnoittelussa sovelletaan edelleen ekvivalenssiperiaatetta. Tulojen ja menojen pääoma-arvot asetetaan siis yhtä suuriksi. Tuloksi katsotaan nyt myös kuormitustulo ja menoksi liikekulut.

Tarkastellaan esimerkkinä kuolemanvaravakuutusta, jossa κ, ε ja I ovat positiivisia ja γ ja ϕ nollia. Olkoon vakuutettu x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä, vakuutuskausi n vuotta ja maksuaika h vuotta. Ekvivalenssiperiaatteen mukainen $\bar{B}$ määräytyy ehdosta

$$\bar{B}\bar{a}_{x:\overline{h}|} = SA_{x:\overline{n}|}(K) + \kappa\bar{B}\bar{a}_{x:\overline{h}|} + \varepsilon S\bar{a}_{x:\overline{n}|} + I.$$

Tässä on oletettu, että κ vastaa vakuutusmaksujen keräämisestä syntyviä kustannuksia, joita syntyy siis vain maksuaikana. Toisaalta ε on koko vakuutusaikana syntyviä kustannuksia vastaava erä ja I perustamiskustannus. Ratkaisuksi saadaan

$$\bar{B} = \frac{SA_{x:\overline{n}|}(K) + \varepsilon S\bar{a}_{x:\overline{n}|} + I}{(1-\kappa)\bar{a}_{x:\overline{h}|}} \quad . \tag{6.1}$$

Vastuuvelka määritellään analogisesti tulevien menojen ja tulojen pääoma-arvojen erotuksena. Kehitystä voidaan kuvata Thielen yhtälöllä kuten aiemminkin. Merkitään elossa olevan vakuutetun vastuuvelkaa hetkellä t edelleen symbolilla $V(t)$. Suoraan määritelmän nojalla saadaan välillä $t \in (0, h)$,

$$V(t) = SA_{x+t:\overline{n-t}|}(K) + \varepsilon S\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - (1-\kappa)\bar{B}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|}. \tag{6.2}$$

Aikavälillä $t \in (0, h)$ Thielen yhtälö on kuten kohdassa 5.3, mutta tuloja kertyy intensiteetillä $\bar{B}$ ja menoihin on lisättävä vakiointensiteetit $\kappa\bar{B}$ ja εS. Saadaan

$$V'(t) = -\mu(x+t)S + \bar{B} + \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t) - \kappa\bar{B} - \varepsilon S. \tag{6.3}$$

Alkuehtona on nyt $V(0+) = -I$, sillä perustamiskustannukset syntyvät alussa ja näitä vastaava kuormitustulo kerätään maksuaikana $[0, h]$ intensiteetin $\bar{B}$ osana. Todetaan, että vastuuvelka on negatiivinen jonkin aikaa vakuutuskauden alussa.

Kappaleesa 5.3 johdettujen tulosten nojalla yhtälön (6.3) ratkaisu on

(6.4)

$$V(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}$$
$$\cdot \left[-I + \big((1-\kappa)\bar{B} - \varepsilon S\big)\int_0^t {}_up_x e^{-\int_0^u \delta(s)ds}du - S\int_0^t \mu(x+u){}_up_x e^{-\int_0^u \delta(s)ds}du\right].$$

Käyttämällä yhtälöä (6.1) saadaan konkreettinen esitys vastuuvelalle. Välillä $t \in (h, n)$ yhtälö on kuten (6.3), mutta termi $(1-\kappa)\bar{B}$ jää pois. Reunaehtona voidaan käyttää jatkuvuusvaatimusta pisteessä $t = h$ tai ehtoa $V(n-) = 0$.

Mikäli γ-kuormitus on positiivinen, voidaan Thielen yhtälön avulla määrätä $\bar{B}$.

Tarkastellaan vielä erikoistapausta $h = n$. Käyttämällä yhtälöä (6.1) saadaan (6.4) muotoon

$$V(t) = e^{\int_0^t \left(\delta(s)+\mu(x+s)\right)ds}\left[\left(-1 + \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}\right)I + \bar{P}\bar{a}_{x:\overline{t}|} - SA_{x:\overline{t}|}(K)\right],$$

missä

$$\bar{P} = S\,\frac{A_{x:\overline{n}|}(K)}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

on (netto)vakuutusmaksuintensiteetti. Jos $I = 0$, on $V(t)$ sama kuin nettovastuuvelka retrospektiivisesti laskettuna. Siis bruttovastuuvelka on tätä pienempi, jos $I > 0$. Tämä selittyy siten, että κ- ja ε-kuormitusten antamat tulot ovat mallissa tasapainossa menojen kanssa eikä tältä osin synny vastuuvelkaa. Perustamiskustannusten osalta vakuutettu on velkaa yhtiölle. Tämä kuolettuu vasta vakuutuskauden päättyessä.

Toisinaan erää I vastaavat kustannukset otetaan huomioon keskimääräisellä tasolla mallin muissa osissa (κ- ja ε-kuormitus edellä). Perustamiskustannukset kerätään siis näissä osissa vakuutuskauden aikana (toisin kuin edellä, jossa I:tä vastaava erä kyllä sisältyi intensiteettiin $\bar{B}$, mutta κ- ja ε-kuormituksilla katettiin muita kuluja). Tässä tilanteessa käytetään toisinaan *zillmerointia.* Tällöin vastuuvelka määrätään aluksi ikään kuin perustamiskustannukset syntyisivät tasaisesti vakuutuskauden aikana. Oikaisu tehdään erillisellä operaatiolla, zillmeroinnilla. Menettelyä on käsitelty tarkemmin lähteessä Pesonen et al. (2014), kohta 4.5.1.

7 Vakuutussopimuksen muuttamisesta

Sopimusten pitkäaikaisuudesta johtuen syntyy tarpeita muuttaa vakuutusta esimerkiksi vakuutetun olosuhteiden muuttuessa. Tämä on usein mahdollista. Ääritapauksessa vakuutus päätetään kesken vakuutuskauden. Tällöin puhutaan *takaisinostosta* (yhtiö ostaa vakuutuksen takaisin vakuutetulta ja kaikki sitoumukset päättyvät).

Yleisenä periaatteena muutoksissakin on ekvivalenssiperiaate. Muutoshetkellä vakuutuksella on tietty arvo, jota muutoksen jälkeisen tilanteen tulee vastata.

Mikäli vakuutus päätetään kesken kauden, vapautuu yhtiö tulevia tapahtumia koskevista velvoitteistaan ja vakuutettu tulevista vakuutusmaksuista. Tulevien tapahtumien pääoma-arvo on vastuuvelka. Takaisinostoarvolla tarkoitetaan juuri tätä. Yhtiö maksaa sen siis vakuutetulle kertasuorituksena. Muutos on neutraali kohdan 4 alussa esitettyjen periaatteiden mukaisesti.

Yleisesti sopimusta muutettaessa lähtökohtana on, että vastuuvelan tulee säilyä muutoksessa. Tällöin tulevien menojen ja tulojen erotuksen pääoma-arvo säilyy muutoksessa. Takaisinostossa vastuuvelka ennen muutosta on sama kuin vastuuvelka muutoksen jälkeen juuri ennen kertasuorituksen maksamista.

Tarkastellaan esimerkkinä *vapaakirjamuutosta*. Olkoon alkuperäinen sopimus kohdan 6 mukainen kuolemanvaravakuutus. Kuormituksista siis vain κ, ε ja I ovat nollasta poikkeavia. Oletetaan lisäksi, että $h = n$ eli että maksuaika on sama kuin vakuutusaika.

Hetkellä $t \in (0, n)$ vastuuvelka on siis kaavan (6.4) mukainen. Muutetaan vakuutus sellaiseksi, että vakuutusmaksuja ei makseta hetken t jälkeen. Vastuuvelalla pystytään kuitenkin rahoittamaan kuolemanvaravakuutus ajalle (t, n) eräälle korvausmäärälle S'. Vakuutus on tällöin muutettu vapaakirjaksi. Tulevien menojen ja tulojen pääoma-arvojen erotus asetetaan siis vastuuvelan suuruiseksi eli saadaan yhtälö

$$V(t) = S' \int_t^n \mu(x+u)\,{}_{u-t}p_{x+t} e^{-\int_t^u \delta(s)ds} du + \varepsilon S' \int_t^n {}_{u-t}p_{x+t} e^{-\int_t^u \delta(s)ds} du,$$

josta S' voidaan ratkaista. Muutos edellyttää tietysti, että $V(t) > 0$.

Takaisinostoa (ja myös muita muutoksia) voidaan pitää vakuutetun optiona eli oikeutena toteuttaa takaisinosto haluamallaan hetkellä. Kysyntää tällaiselle saattaa syntyä esimerkiksi siksi, että markkinoilta on saatavissa oleellisesti parempi riskitön tuotto kuin mitä aikoinaan tehty vakuutussopimus takaa. Todettakoon, että todellinen tuotto on yleensä perusteen mukaista korkoutuvuutta suurempi, koska 'ylituotto' jaetaan vakuutetuille lisäetuina (asiaa tarkastellaan lähemmin seuraavassa kappaleessa). Optiolla on kuitenkin tietty arvo vakuutetulle. Yhtiön näkökulmasta näiden optioiden käyttäminen on ongelmallista, koska tämä lisää tulevien kassavirtojen epävarmuutta.

Lisälähde kohtaan 7: Dickson et al. (2013).

8 Ylijäämän muodostuminen

Kuten aiemmin on todettu, asetetaan vakuuttamiseen liittyvät keskeiset parametrit varovaisesti. Esimerkiksi korkoutuvuus on yleensä 'pieni'. Kuolemanvaravakuutuksessa 'suuri' kuolevuus voidaan katsoa myös varovaiseksi oletukseksi (elämänvaravakuutuksessa taas 'pieni' kuolevuus on varovaisuutta). Kutsutaan näitä vastuuvelan laskennassa käytettäviä parametreja *1. kertaluvun perusteeksi* (first order basis).

Varovaisuusperiaatteen taustana on turvata vakuutetut edut. Seurauksena on, että vakuutusyhtiölle (tyypillisesti) syntyy systemaattista ylijäämää. Perusteltua on käyttää syntynyt ylijäämä vakuutettujen hyväksi.

Ylijäämän määrä pystytään selvittämään vasta jälkikäteen objektiivisesti. Annettuna hetkenä havaitaan toteutunut korkoutuvuus, kuolevuus jne. Todellista kuolevuutta ei tarkkaan ottaen havaita, mutta toteuma antaa kuitenkin aiheen sen uudelleenarviointiin. Merkitään havaittuja suureita symboleilla δ^*, μ^* jne. Kutsutaan todellisia parametreja 2. kertaluvun perusteeksi. Kuolevuuteen μ^* ja korkoutuvuuteen δ^* liittyviä muita symboleja merkitään myös tähdellä varustettuna, esimerkiksi p_x^*, q_x^*, i^*.

8.1 Diskreetti kuolemanvaravakuutus

Tarkastellaan kuolemanvaravakuutusta, josta korvataan määrä S kuolinvuoden lopussa, mikäli tämä on korkeintaan n. Vakuutettu olkoon x-ikäinen ja vakuutus kertamaksuinen. Maksun suuruus olkoon P.

Ensimmäisen vuoden *satunnaisylijäämä* η_1 on

$$\eta_1 = (1 + i_1^*)P - S\mathbb{1}\big(T(x) \leq 1\big) - V(1)\mathbb{1}\big(T(x) > 1\big),$$

missä i_1^* on toteutunut sijoitustoiminnan tuottoaste. Vastuuvelka $V(1)$ määrätään 1. kertaluvun perusteilla. Tuottoina yhtiö saa siis määrän $(1 + i_1^*)P$, kuluja syntyy kuolintapauskorvauksista. Lisäksi yhtiön on varauduttava tuleviin korvauksiin vakuutetun eläessä hetkellä yksi.

Yhtiötasolla ylijäämä voidaan kuvata odotusarvona käyttäen havaintoihin perustuvaa kuolevuutta μ^*. Tämä on yhteensopivaa vakuutusmaksujen ja vastuuvelan määräämisperiaatteiden kanssa. Merkitään hetkeen k mennessä kertynyttä keskimääräistettyä ylijäämää symbolilla Y_k. Siis

$$Y_1 = (1 + i_1^*)P - Sq_x^* - V(1)p_x^*.$$

Merkitään $1 + i_k = e^{\int_{k-1}^{k} \delta(s)ds}$. Tällöin

$$P = (1 + i_1)^{-1}Sq_x + (1 + i_1)^{-1}V(1)p_x,$$

joten

$$\begin{aligned} Y_1 &= (i_1^* - i_1)P - S(q_x^* - q_x) - V(1)(p_x^* - p_x) \\ &= (i_1^* - i_1)P - \big(S - V(1)\big)(q_x^* - q_x). \end{aligned}$$

Ylijäämä syntyy siis siitä, että i_1^* ylittää i_1:n tai q_x^* alittaa q_x:n. Suure $S - V(1)$ on riskisumma, joka kuvaa kuolintapauksessa syntyvää kokonaiskulua.

Yleisesti vuonna k yhtiöllä on käytettävissään elossa olevaa vakuutettua kohti määrä $V(k-1)$ vuoden alussa. Tämä yhdessä sijoitustuottojen kanssa vastaa tulevia korvauksia odotusarvotasolla (1. kertaluvun peruste). Satunnaisylijäämä vuonna k on

$$\eta_k = (1+i_k^*)V(k-1) - S\mathbb{1}\big(T(x+k-1) \le 1\big) - V(k)\mathbb{1}\big(T(x+k-1) > 1\big).$$

Odotusarvotasolla ylijäämäksi saadaan vuonna k

$$\begin{aligned} y_k &= (1+i_k^*)V(k-1) - Sq_{x+k-1}^* - V(k)p_{x+k-1}^* \\ &= (i_k^* - i_k)V(k-1) - \big(S - V(k)\big)(q_{x+k-1}^* - q_{x+k-1}). \end{aligned}$$

Mikäli kertyneet ylijäämät aiemmilta vuosilta ovat yhtiön hallussa, tulee näille myös hyvittää korkotuotto. Näin ollen

$$Y_k = \sum_{j=1}^{k} (1+i_{j+1}^*)\cdots(1+i_k^*)_{j-1}p_x^*\, y_j.$$

8.2 Yleinen kuolemanvaravakuutus

Tarkastellaan ylijäämän muodostumista kuolemanvaravakuutuksessa, jossa kuolinhetkellä $T(x) = t$ korvataan määrä $S(t)$. Oletetaan, että S on jatkuva. Olkoon vakuutuskauden pituus n ja vakuutettu alussa x-ikäinen. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti intensiteetillä $\bar{B}$ koko vakuutuskauden ajan. Tästä kuormituksen osuus on $\kappa\bar{B}$.

Toisen kertaluvun perusteet olkoot μ^*, δ^* ja κ^*. Tässä κ^* on toteutunut liikekulu suhteessa $\bar{B}$:aan. Oletetaan, että μ, μ^*, δ^* ja κ^* ovat jatkuvia. Lisäksi $\bar{B}$ oletetaan ekvivalenssiperiaatteen mukaiseksi. Ylijäämää ei palauteta vakuutusaikana.

Tarkastellaan ylijäämän muodostumista hetkellä t elossa olevalle vakuutetulle. Olkoon tämä $y_t(\Delta)$ hetkellä $t+\Delta$ $\big($kumuloitunut ylijäämä välillä $[t, t+\Delta)\big)$. Tällöin

$$y_t(\Delta) = e^{\int_t^{t+\Delta}\delta^*(s)ds}V(t) + \bar{B}\Delta - S(t)_\Delta q_{x+t}^* - \int_t^{t+\Delta}\kappa^*(s)\bar{B}ds - {}_\Delta p_{x+t}^* V(t+\Delta) + o(\Delta),$$

kun $\Delta \to 0+$. Jatkuvuusoletusten nojalla

$$\begin{aligned} y_t(\Delta) = {} & V(t) + \delta^*(t)V(t)\Delta + \bar{B}\Delta \\ & - S(t)\mu^*(x+t)\Delta - \kappa^*(t)\bar{B}\Delta - V(t+\Delta) + \mu^*(x+t)V(t)\Delta + o(\Delta). \end{aligned}$$

Siis

$$y_t'(0+) = -V'(t) + \big(\delta^*(t) + \mu^*(x+t)\big)V(t) + \bar{B} - S(t)\mu^*(x+t) - \kappa^*(t)\bar{B}. \tag{8.1}$$

Toisaalta Thielen yhtälön nojalla

$$V'(t) = \big(\delta(t) + \mu(x+t)\big)V(t) + \bar{B} - S(t)\mu(x+t) - \kappa\bar{B},$$

joten

$$y_t'(0+) = \big(\delta^*(t) - \delta(t)\big)V(t) - \big(S(t) - V(t)\big)\big(\mu^*(x+t) - \mu(x+t)\big) + \big(\kappa - \kappa^*(t)\big)\bar{B}.$$

Ylijäämää syntyy siis varovaisten korko-, kuolevuus- ja liikekuluoletusten takia.

Olkoon Y_t hetkeen t mennessä kertynyt kokonaisylijäämä. Dynamiikka on

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + \delta^*(t)Y_t\Delta + {}_tp_x^*\varrho(t)\Delta + o(1)\Delta,$$

missä $\varrho(t) = y_t'(0+)$. Siis

$$Y_t = \int_0^t e^{\int_s^t \delta^*(u)du}{}_sp_x^*\varrho(s)ds.$$

Diskonttaamalla hetkeen nolla saadaaan

$$e^{-\int_0^n \delta^*(u)du}Y_n = \int_0^n e^{-\int_0^s \left(\delta^*(u)+\mu^*(x+u)\right)du}\left[\bar{B} - \bar{B}^*\right] ds,$$

missä $\bar{B}$ on 1. kertaluvun ja $\bar{B}^*$ 2. kertaluvun perusteen mukainen vakuutuksen bruttomaksuintensiteetti. Nimittäin kaavan (8.1) nojalla

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^n \delta^*(u)du}Y_n &= \int_0^n e^{-\int_0^s \delta^*(u)du}{}_sp_x^*\varrho(s)ds \\ &= \int_0^n e^{-\int_0^s \left(\delta^*(u)+\mu^*(x+u)\right)du}\big[-V'(s) + \big(\delta^*(s) + \mu^*(x+s)\big)V(s)\big]ds \\ &\quad + \int_0^n e^{-\int_0^s \left(\delta^*(u)+\mu^*(x+u)\right)du}\big[\bar{B}^* - S(s)\mu^*(x+s) - \kappa^*(s)\bar{B}\big]ds \\ &\quad + \int_0^n e^{-\int_0^s \left(\delta^*(u)+\mu^*(x+u)\right)du}\big(\bar{B} - \bar{B}^*\big)ds. \end{aligned}$$

Ensimmäinen integraali on

$$\Big/_0^n - e^{-\int_0^s \left(\delta^*(u)+\mu^*(x+u)\right)du}V(s) = 0,$$

sillä $V(0+) = V(n-) = 0$. Toinen integraali on myös nolla, koska $\bar{B}^*$ on 2. kertaluvun perusteilla määrätty (todellista hoitokulua κ^* ei ole tässä suhteutettu $\bar{B}^*$:een vaan $\bar{B}$:aan).

Lisälähteitä kohtaan 8: Ramlau-Hansen (1995) ja Norberg (2001).

9 Monitilaiset mallit

Tähän astisissa tarkasteluissa korvaukset ovat riippuneet vain siitä, onko vakuutettu (vakuutetut, edunsaajat) elossa vai ei. Yleisemmin on tarvetta tarkastella vakuutuksia, joissa korvaukset riippuvat vakuutetun tilasta. Tila voi olla esimerkiksi 'aktiivi', 'työkyvytön', 'kuollut'. Asiaa havainnollistaa kuva 9.1. Nuolet kuvaavat mahdollisia siirtymisiä tilojen välillä.

Tarkastellaan yleisemmin malleja, joissa mahdollisten tilojen joukko

$$E = \{1, \dots, N\}$$

on äärellinen. Olkoon $Z(t)$ on vakuutetun tila hetkellä t. Taustalle ajatellaan todennäköisyyskenttä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jossa kaikki muuttujat $Z(t)$ on määritelty. Oletetaan siis, että

$$\mathbb{P}\big(Z(t) \in E\big) = 1$$

kaikilla $t \geq 0$. Joukkoa E kutsutaan prosessin *tila-avaruudeksi.* Vakuutetun tilaa on tarpeen tarkastella stokastisena prosessina. Tätä varten tarvitaan konkreettinen malli prosessille Z.

Korvaus edellä esitetyssä esimerkissä voisi olla esimerkiksi $\bar{S}\mathbb{1}\big(Z(t) = 2\big)dt$. Siis työkyvyttömälle maksetaan jatkuvaa eläkettä määrä $\bar{S}$ aikayksikössä.

9.1 Markov-hyppyprosessista

Oletetaan jatkossa, että $\{Z(t) \,|\, t \geq 0\}$ on *Markov-prosessi.* Intuitiivisesti, tulevaisuuden näkymät riippuvat vain nykytilasta, mutta eivät siitä, miten tilaan on tultu. Tällöin esimerkiksi kaikilla $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, $j_1, \ldots, j_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(Z(t_n) = j_n \,\big|\, Z(t_{n-1}) = j_{n-1}, \ldots, Z(t_1) = j_1\big) = \mathbb{P}\big(Z(t_n) = j_n \,\big|\, Z(t_{n-1}) = j_{n-1}\big), \tag{9.1}$$

edellyttäen, että $\mathbb{P}\big(Z(t_{n-1}) = j_{n-1}, \ldots, Z(t_1) = j_1\big) > 0$. Laajemmin, Markov-prosessilta edellytetään, että kaikilla $u > t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(Z(u) = k \,\big|\, \sigma\big(Z(s), s \leq t\big)\Big) = \mathbb{P}\Big(Z(u) = k \,\big|\, \sigma\big(Z(t)\big)\Big), \tag{9.2}$$

missä $\sigma()$ tarkoittaa suluissa olevien muuttujien generoimaa sigma-algebraa. Tätä kutsutaan *Markov-ominaisuudeksi.* Hyödyllistä on havaita, että sigma-algebran $\sigma\big(Z(t)\big)$ joukot ovat tyyppiä $\{Z(t) = j\}$ olevien joukkojen yhdistelmiä. Kaavan (9.2) oikean (ja siis myös vasemman) puolen mahdolliset arvot ovat

$$\mathbb{P}(Z(u) = k \,|\, Z(t) = j), \quad j \in E.$$

Oletetaan jatkossa, että prosessin realisaatiot ovat oikealta jatkuvia eli että kaikilla ω, kuvaus

$$f : [0, \infty) \to E, \quad f(t) = Z(t) \quad \big(= Z(t)(\omega) \big)$$

on oikealta jatkuva. Lisäksi oletetaan, että vasemmanpuoleiset raja-arvot $\lim_{s \to t-} Z(s)$ ovat olemassa. Tällöin Z on *càdlàg-prosessi*.

Merkitään

$$P_{jk}(t,u) = \mathbb{P}\big(Z(u) = k \,\big|\, Z(t) = j\big), \quad 0 \le t \le u, \quad j,k \in E.$$

Näitä kutsutaan *siirtymätodennäköisyyksiksi*. Yhtälöiden (9.1) nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Z(t_1) = j_1, \dots, Z(t_n) = j_n \,\big|\, Z(0) = j_0\big) \\ = P_{j_0 j_1}(0, t_1) P_{j_1 j_2}(t_1, t_2) \cdots P_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1}, t_n). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Prosessin tilan hetkellä 0 oletetaan olevan kiinteä $j_0 \in E$. Tätä kutsutaan prosessiin *alkutilaksi*. Yhtälön (9.3) nojalla siirtymätodennäköisyydet määräävät prosessin äärellisulotteiset jakaumat. Tällöin määräytyy yksikäsitteisesti kaikkien sigma-algebran $\sigma\big(Z(s)\,;\, s \le t\big)$ joukkojen todennäköisyydet.

Tarkastellaan asiaa toisesta näkökulmasta. Oletetaan, että on annettuna eräät funktiot $P_{jk} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaikilla $j, k \in E$. Oletetaan, että nämä täyttävat ehdot

$$P_{jk}(t,u) \ge 0, \quad \forall\, 0 \le t < u, \quad j,k \in E, \tag{9.4}$$

$$\sum_{k \in E} P_{jk}(t,u) = 1, \quad \forall\, 0 \le t < u, \quad j \in E, \tag{9.5}$$

$$\sum_{m \in E} P_{jm}(t,s) P_{mk}(s,u) = P_{jk}(t,u), \quad \forall\, 0 \le t < s < u, \quad j,k \in E. \tag{9.6}$$

Määräämällä kaavalla (9.3) prosessin äärellisulotteiset jakaumat voidaan muodostaa Markov-prosessi, jonka siirtymätodennäköisyydet ovat juuri funktiot P_{jk}. Todistusta ei esitetä kurssilla.

Triviaalia on, että jokainen Markov-prosessi toteuttaa ehdot (9.4) – (9.5). Ehdot (9.6) muodostavat *Chapman-Kolmogorov -yhtälöt*. Tulkinta on, että siirryttäessä tilasta j tilaan k välillä $[t, u]$, tulee hetkellä $s \in (t, u)$ olla jossain tila-avaruuden tilassa.

Rajataan tarkasteltavaa prosessiluokkaa vielä vaatimalla, että $P_{jk}(\cdot, u)$ ja $P_{jk}(t, \cdot)$ ovat jatkuvia kaikilla $t, u \ge 0$ ja $j, k \in E$, ja että

$$\lim_{u \to t+} P_{jk}(t,u) = \delta_{jk}, \quad \forall\, j,k \in E, \quad t \ge 0, \tag{9.7}$$

missä $\delta_{jj} = 1$ ja $\delta_{jk} = 0$, kun $j \ne k$. Sovitaan vielä, että $P_{jk}(t,t) = \delta_{jk}, \ \forall\, t \ge 0$.

9.2 Yksinkertaisia esimerkkejä

Aiemmin esitetyt elossaolotarkastelut ovat esimerkkejä Markovilaisista malleista. Yksinkertaisimmillaan tiloja on kaksi: elossa, kuollut. Asiaa havainnollistaa kuva 9.2. Olkoon henkilö alussa x-ikäinen ja $T = T(x)$ jäljellä oleva elinaika. Asetetaan

$$Z(t) = \mathbb{1}(T > t) + 2\mathbb{1}(T \leq t).$$

Ilmeisesti

$$\begin{cases} P_{11}(t,u) & = \mathbb{P}(T > u \,|\, T > t) = {}_{u-t}p_{x+t}, \\ P_{12}(t,u) & = {}_{u-t}q_{x+t}, \\ P_{21}(t,u) & = 0, \\ P_{22}(t,u) & = 1. \end{cases}$$

Tila 2 on *absorboiva*, sillä sieltä ei ole siirtymämahdollisuutta muihin tiloihin. Yhtälöt (9.3) toteutuvat. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Z(t_1) = 1, Z(t_2) = 1, Z(t_3) = 2\big) &= \mathbb{P}(T > t_2, T \leq t_3) \\ &= {}_{t_2}p_x \, {}_{t_3-t_2}q_{x+t_2} = {}_{t_1}p_x \, {}_{t_2-t_1}p_{x+t_1} \, {}_{t_3-t_2}q_{x+t_2} \\ &= P_{11}(0,t_1)P_{11}(t_1,t_2)P_{12}(t_2,t_3). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Yhtälöt (9.4)-(9.5) seuraavat suoraan siitä, että $Z(u)$:n ehdollinen jakauma ehdolla $Z(t) = j$ on todennäköisyysmitta. Samoin (9.6) on triviaali, sillä

$$\{Z(u) = k\} = \{Z(u) = k, Z(s) = 1\} \cup \{Z(u) = k, Z(s) = 2\},$$

joten yhtälön (9.8) tapaan

$$\begin{aligned} P_{jk}(t,u) &= \mathbb{P}\big(Z(u) = k \,|\, Z(t) = j\big) \\ &= \sum_{m=1}^{2} \mathbb{P}\big(Z(u) = k, Z(s) = m \,|\, Z(t) = j\big) \\ &= \sum_{m=1}^{2} P_{jm}(t,s)P_{mk}(s,u). \end{aligned}$$

Kohdan 3.4 kilpailevien kuolinsyiden teorian asetelmaa havainnollistaa kuva 9.3. Tässä $E = \{0, 1, \ldots, n\}$. Tila on nyt

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{1}(T \leq t, T = T_j),$$

missä T_j on elinaika, kun j on ainut kuolinsyy ja $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$. Olettaen, että

$$\mathbb{P}(T_i = T_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \tag{9.9}$$

$Z(t)$ ilmaisee kuolinsyyn (tai että vakuutettu elää, jos $Z(t) = 0$). Tämä pätee, jos $T_1, \ldots, T_n$ ovat riippumattomia. Heikompi vaatimus (9.9) on tässä ympäristössä myös käsiteltävissä. Markov-ominaisuus on suoraviivaisesti todettavissa. Jos esimerkiksi $j \neq 0$, niin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(Z(t_1) = 0, \ldots, Z(t_{m-1}) = 0, Z(t_m) = j\big) &= \mathbb{P}\big(T \in (t_{m-1}, t_m], T = T_j\big) \\
&= \mathbb{P}(T > t_{m-1})\mathbb{P}\big(T \in \underbrace{(t_{m-1}, t_m], T = T_j}_{=\{Z(t_{m-1})=0, Z(t_m)=j\}} \mid \underbrace{T > t_{m-1}}_{=\{Z(t_{m-1})=0\}}\big) \\
&= \mathbb{P}(T > t_1)\mathbb{P}(T > t_2 \,|\, T > t_1) \cdots \mathbb{P}(T > t_{m-1} \,|\, T > t_{m-2}) P_{0j}(t_{m-1}, t_m) \\
&= P_{00}(0, t_1) P_{00}(t_1, t_2) \cdots P_{00}(t_{m-2}, t_{m-1}) P_{0j}(t_{m-1}, t_m).
\end{aligned}$$

Yhtälöt (9.4)-(9.5) toteutuvat samoin perustein kuin edellisessä esimerkissä.

9.3 Intensiteettimallit

Pidemmälle menevien tulosten saamiseksi oletetaan vielä, että, $\forall j, k \in E$, $t \geq 0$, on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\Delta \to 0+} \frac{P_{jk}(t, t + \Delta)}{\Delta} \doteq \mu_{jk}(t), \quad j \neq k. \tag{9.10}$$

Funktioita μ_{jk} kutsutaan *siirtymäintensiteeteiksi*. *Pysyvyysintensiteetit* μ_{jj} määritellään ehdosta

$$\mu_{jj} = -\sum_{k \neq j} \mu_{jk}. \tag{9.11}$$

Oletuksesta $P_{jk}(t, t) = \delta_{jk}$ seuraa, että

$$\mu_{jk}(t) = \frac{\partial^+}{\partial u} P_{jk}(t, u)_{|u=t}, \tag{9.12}$$

missä $\frac{\partial^+}{\partial u}$ tarkoittaa oikeanpuoleista derivaattaa. Yhtälö (9.12) seuraa suoraan (9.10):sta, kun $j \neq k$. Jos taas $j = k$, niin

$$\begin{aligned}
P_{jj}(t, t + \Delta) - P_{jj}(t, t) &= 1 - \sum_{k \neq j} P_{jk}(t, t + \Delta) - 1 \\
&= -\sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t)\Delta + o(\Delta) = \mu_{jj}(t)\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}$$

Tästä (9.12) seuraa.

Lause 9.1. *Oletetaan, että siirtymäintensiteetit μ_{jk} ovat jatkuvia. Silloin*

$$\frac{\partial}{\partial u} P_{jk}(t,u) = \sum_{m\in E} P_{jm}(t,u)\mu_{mk}(u) \tag{9.13}$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{jk}(t,u) = -\sum_{m\in E} \mu_{jm}(t) P_{mk}(t,u), \tag{9.14}$$

$\forall j,k \in E$, $0 \le t \le u$.

Yhtälöitä (9.13) ja (9.14) kutsutaan *Kolmogorovin forward-* ja *backward-yhtälöiksi*. Jatkossa siirtymäintensiteetit oletetaan aina jatkuviksi.

Lauseen 9.1 todistus. Olkoon $\Delta > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} P_{jk}(t,u+\Delta) &= \sum_{m\in E} P_{jm}(t,u) P_{mk}(u,u+\Delta) \\ &= \sum_{\substack{m\in E\\ m\neq k}} P_{jm}(t,u)\mu_{mk}(u)\Delta + P_{jk}(t,u)\big[1+\mu_{kk}(u)\Delta\big] + o(\Delta). \end{aligned}$$

Siis

$$P_{jk}(t,u+\Delta) - P_{jk}(t,u) = \sum_{m\in E} P_{jm}(t,u)\mu_{mj}(u)\Delta + o(\Delta).$$

Tästä seuraa, että (9.13) pätee, kun $\frac{\partial}{\partial u}$ korvataan oikeanpuoleisella derivaatalla $\frac{\partial^+}{\partial u}$. Tästä saadaan (9.13), sillä yleisesti, jos

$$\frac{\partial^+}{\partial u} f(u) = g(u), \qquad \text{sopivalla välillä}$$

missä f ja g ovat jatkuvia, niin itse asiassa $\frac{\partial}{\partial u} f(u)$ on olemassa. Yhtälön (9.14) todistus on analoginen. □

Otetaan käyttöön matriisimerkinnät

$$P(t,u) = \big(P_{jk}(t,u)\big)$$

ja

$$Q(t) = \big(\mu_{jk}(t)\big),$$

$j,k \in E$. Tällöin $Q(t)$ on *intensiteettimatriisi* hetkellä t.

Matriisin derivointi ja integrointi tarkoittavat seuraavassa vastaavia alkioittaisia operaatioita. Forward- ja backward-yhtälöt voidaan nyt esittää muodossa

$$\frac{\partial}{\partial u} P(t,u) = P(t,u)Q(u)$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t,u) = -Q(t)P(t,u).$$

Lemma 9.2. *Oletetaan, että intensiteetit μ_{ij} ovat rajoitettuja välillä $[t,u]$. Silloin matriisin*

$$R_n(t,u) \doteq \int_t^u \left(\int_t^{u_1} \left(\int_t^{u_2} \left(\cdots \left(\int_t^{u_{n-1}} Q(u_n) \cdots Q(u_1) du_n \right) du_{n-1} \right) \cdots \right) du_1$$

elementit ovat itseisarvoiltaan korkeintaan $\frac{(NK)^n (u-t)^n}{n!}$ kaikilla $n \geq 2$, missä

$$K = \sup \left\{ |\mu_{jk}(s)| \, ; \, j,k \in E, s \in [t,u] \right\}.$$

Todistus. Ilmeisesti matriisin

$$Q(u_n) \cdots Q(u_1)$$

elementit ovat itseisarvoltaan korkeintaan $(NK)^n$, joten tarkasteltavan integraalin alkiot ovat itseisarvoltaan korkeintaan

$$(NK)^n \int_t^u \left(\int_t^{u_1} \left(\cdots \int_t^{u_{n-1}} du_n \right) \cdots \right) du_1.$$

Integroimisalue on siis

$$\left\{ (u_1, \ldots, u_n) \,|\, t \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \ldots \leq u_1 \leq u \right\}.$$

Integraalin arvo ei muutu, jos muuttujia $u_1, \ldots, u_n$ permutoidaan. Suorittamalla kaikki permutaatiot ja laskemalla syntyvät integraalit yhteen saadaan integraali yli suorakulmion $[t,u]^n$. Koska permutaatioita on $n!$ kappaletta, saadaan lemman yläraja. □

Lause 9.3. *Oletetaan, että intensiteetit μ_{ij} ovat jatkuvia välillä $[0,b]$. Silloin kaikilla $0 \leq t < u \leq b$,*

$$P(t,u) = I + \int_t^u Q(s) ds + \sum_{n \geq 2} R_n(t,u),$$

missä $R_n(t,u)$ on kuten lemmassa 9.2 ja I on N-ulotteinen identiteettimatriisi.

Todistus. Forward-yhtälöiden ja alkuehtojen (9.7) nojalla

$$P(t,u) = I + \int_t^u P(t,u_1)Q(u_1)du_1.$$

Soveltamalla tätä oikeaan puoleen saadaan

$$P(t,u) = I + \int_t^u Q(s)ds + \int_t^u \left(\int_t^{u_1} P(t,u_2)Q(u_2)Q(u_1)du_2 \right) du_1$$

ja edelleen

$$P(t,u) = I + \int_t^u Q(s)ds + \sum_{n=2}^m R_n(t,u) + \varepsilon_m,$$

missä

$$\varepsilon_m = \int_t^u \left(\int_t^{u_1} \left(\cdots \int_t^{u_{m-1}} P(t,u_m)Q(u_m)\cdots Q(u_1)du_n \right) \cdots \right) du_1.$$

Koska matriisin $P(t,u_m)$ elementit ovat rajoitettuja, suppenee ε_m kohti nollaa lemman 9.2 nojalla. Lauseen väite seuraa tästä. □

Lause 9.1 antaa tavan määrätä Markov-prosessin siirtymätodennäköisyydet, kun intensiteetit on annettu. Usein differentiaaliyhtälöt (9.13) ja (9.14) pystytään ratkaisemaan vain numeerisesti. Toinen tapa on soveltaa lausetta 9.3. Likiarvoja siirtymätodennäköisyyksille saadaan ottamalla huomioon riittävä määrä termejä lauseen sarjasta.

Sovelluksissa on yleensä mukavinta estimoida juuri intensiteetit ja määrätä siirtymätodennäköisyydet erimerkiksi forward-yhtälöistä. Kuten seuraavassa nähdään, ratkaisut määräävät Markov-prosessin. Siirtymätodennäköisyyksien suora estimointi on hankalampi tehtävä, koska ne sisältävät kaksi aikaparametria ja lisäksi on huolehdittava yhtälöiden (9.6) toteutumisesta.

Lause 9.4. *Olkoon $Q(t) = \big(\mu_{jk}(t)\big)$ intensiteettimatriisi kaikilla $t \geq 0$. Toisin sanoen*

$$\mu_{jk}(t) \geq 0, \forall j \neq k, \quad \mu_{jj}(t) = -\sum_{k\neq j} \mu_{jk}(t).$$

Oletetaan, että intensiteetit μ_{jk} ovat jatkuvia. Silloin on olemassa Markov-prosessi, jonka intensiteettimatriisi on $Q(t)$ kaikilla $t \geq 0$. Erityisesti siirtymätodennäköisyydet toteuttavat lauseen 9.1 differentiaaliyhtälöt.

Todistus. Lemman 9.2 merkinnöin matriisin $R_n(t,u)$ alkioille $R_n(t,u)_{ij}$ pätee

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 2} \mid R_n(t,u)_{ij} \mid \\ \leq\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(NK)^n(u-t)^n}{n!} = e^{NK(u-t)}. \end{aligned}$$

Sarja siis suppenee itseisesti, joten voidaan määritellä matriisit $B(t,u)$ ehdosta

$$B(t,u) = I + \int_t^u Q(s)ds + \sum_{n\geq 2} R_n(t,u). \tag{9.15}$$

Tavoitteena on osoittaa, että matriisin $B(t,u)$ elementit antavat vaaditut Markov-prosessin siirtymätodennäköisyydet.

Osoitetaan ensin, että

$$B(t,u) = I + \int_t^u B(t,s)Q(s)ds. \tag{9.16}$$

Ensinnäkin

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 2} R_n(t,u) \\
&= \int_t^u \left[\int_t^{u_1} Q(u_2)du_2 + \sum_{n\geq 3}\int_t^{u_1}\left(\cdots\left(\int_t^{u_{n-1}} Q(u_n)\cdots Q(u_2)du_n\right)\cdots\right)du_2\right] Q(u_1)du_1 \\
&= \int_t^u \left[\int_t^{u_1} Q(u_2)du_2 + B(t,u_1) - I - \int_t^{u_1} Q(s)ds\right] Q(u_1)du_1.
\end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned}
B(t,u) &= I + \int_t^u Q(s)ds + \int_t^u \left(B(t,u_1) - I\right) Q(u_1)du_1 \\
&= I + \int_t^u B(t,s)Q(s)ds,
\end{aligned}$$

joka on juuri (9.16).

Seuraavaksi näytetään, että

$$B(t,u) = I + \int_t^u Q(s)B(s,u)ds. \tag{9.17}$$

Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
R_n(t,u) &= \int_{\mathbb{R}^n} Q(u_n)\cdots Q(u_1)\mathbb{1}(u \geq u_1 \geq u_2 \cdots \geq u_n \geq t) \\
&= \int_t^u \left(\int_{u_n}^u \cdots \left(\int_{u_2}^u Q(u_n)\cdots Q(u_1)du_1\right)\cdots\right)du_n \\
&= \int_t^u Q(u_n)\left[\int_{u_n}^u \left(\cdots\left(\int_{u_2}^u Q(u_{n-1})\cdots Q(u_1)du_1\right)\cdots\right)du_{n-1}\right]du_n \\
&= \int_t^u Q(u_n)R_{n-1}(u_n,u)du_n.
\end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2} R_n(t,u) &= \int_t^u \left(\int_t^{u_1} Q(u_2)du_2\right) Q(u_1)du_1 + \sum_{n\geq 3}\int_t^u Q(s)R_{n-1}(s,u)ds \\
&= \int_t^u \left(Q(s)\int_s^u Q(u_1)du_1 + Q(s)\left[B(s,u) - I - \int_s^u Q(v)dv\right]\right) ds \\
&= \int_t^u Q(s)B(s,u)ds - \int_t^u Q(s)ds.
\end{aligned}$$

Tästä (9.17) seuraa.

Tulosten (9.16) ja (9.17) nojalla matriisille $B(t,u)$ pätee

$$B(t,t) = I, \quad \forall t \geq 0, \tag{9.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} B(t,u) = B(t,u)Q(u), \quad \forall\, 0 \leq t < u, \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t,u) = -Q(t)B(t,u) \quad \forall\, 0 \leq t < u. \tag{9.20}$$

Erityisesti kaikilla $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\to 0+} \frac{B_{jk}(t,t+\Delta)}{\Delta} &= \lim_{\Delta\to 0+} \frac{B_{jk}(t,t+\Delta) - B_{jk}(t,t)}{\Delta} \\
&= \sum_{m\in E} B_{jm}(t,t)\mu_{mk}(t) = \mu_{jk}(t).
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Osoitetaan, että B-funktiot toteuttavat ehdot (9.4) – (9.6). Tällöin tiedetään, että ne määräävät Markov-prosessin. Edellä esitetyn nojalla intensiteettimatriisi on $Q(t)$ kaikilla $t \geq 0$.

Todistetaan ensin yhtälö (9.5). Olkoot $t \geq 0$ ja $j \in E$ kiinteitä. Määritellään kuvaus $f : [t,\infty) \to \mathbb{R}$ ehdosta

$$f(u) = \sum_{k\in E} B_{jk}(t,u).$$

Tuloksen (9.19) nojalla

$$\begin{aligned}
f'(u) &= \sum_{k\in E}\sum_{m\in E} B_{jm}(t,u)\mu_{mk}(u) \\
&= \sum_{m\in E} B_{jm}(t,u) \sum_{k\in E} \mu_{mk}(u) = 0.
\end{aligned}$$

Siis f on vakio ja

$$\begin{aligned}
f(u) &= \lim_{s\to t+} f(s) \\
&= B_{jj}(t,t) = 1.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa yhtälön (9.5).

Todistetaan seuraavaksi (9.6). Olkoot $0 \le t < u$ ja $j, k \in E$ kiinteitä sekä

$$g(s) = \sum_{m \in E} B_{jm}(t,s) B_{mk}(s,u), \quad s \in [t,u].$$

Tulosten (9.19) ja (9.20) nojalla

$$\begin{aligned} g'(s) &= \sum_{m \in E} B_{jm}(t,s) \frac{\partial}{\partial s} B_{mk}(s,u) + \sum_{m \in E} \left(\frac{\partial}{\partial s} B_{jm}(t,s) \right) B_{mk}(s,u) \\ &= -\sum_{m \in E} B_{jm}(t,s) \sum_{r \in E} \mu_{mr}(s) B_{rk}(s,u) + \sum_{m \in E} \left(\sum_{r \in E} B_{jr}(t,s) \mu_{rm}(s) \right) B_{mk}(s,u) = 0. \end{aligned}$$

Siis g on vakio ja

$$g(s) = \lim_{v \to t+} g(v) = B_{jk}(t,u).$$

On vielä todistettava (9.4). Oletetaan aluksi, että $\mu_{jk}(u) > 0$ kaikilla $u \ge 0$ ja kaikilla $j \ne k$. Oletetaan, että olisi

$$B_{jk}(t,u) < 0 \quad \text{jollain} \quad 0 \le t < u, \quad j \ne k.$$

Kiinnitetään tällainen t ja merkitään

$$\underline{u} = \inf\{u \ge t \mid B_{jk}(t,u) < 0 \text{ jollain } j,k \in E\}.$$

Hyödynnetään jo saatuja tuloksia (9.19) ja (9.21). Koska $B_{jj}(t,t) = 1$ ja kaikilla $j \ne k$,

$$B_{jk}(t, t+\Delta) = \mu_{jk}(t)\Delta + o(1)\Delta, \quad \Delta \to 0+,$$

niin välttämättä $\underline{u} > t$. Ilmeisesti $B_{jk}(t,\underline{u}) = 0$ eräälle $j,k \in E$ ja lisäksi

$$B_{jk}(t,u) < 0 \quad \text{kaikilla} \quad u \in (\underline{u}, \underline{u} + \Delta)$$

eräälle $\Delta > 0$. Koska (9.6) toteutuu, niin kaikilla $u \ge \underline{u}$,

$$B_{jk}(t,u) = \sum_{m \in E} B_{jm}(t,\underline{u}) B_{mk}(\underline{u},u).$$

Tämä on ei-negatiivinen, koska $B_{jm}(t,\underline{u}) \ge 0$ ja $B_{mk}(\underline{u},u) \ge 0$, kun $u - \underline{u}$ on pieni. Saatiin ristiriita.

Mikäli intensiteetit eivät ole aidosti positiivisia, tarkastellaan ensin intensiteettimatriiseja $Q^\varepsilon(t) = (\mu^\varepsilon_{jk}(t))$,

$$\begin{cases} \mu^\varepsilon_{jk}(t) = \mu_{jk}(t) + \varepsilon, & j \ne k, \\ \mu^\varepsilon_{jj}(t) = \mu_{jj}(t) - (N-1)\varepsilon, \end{cases}$$

missä $\varepsilon > 0$. Jo todistetun nojalla tätä vastaa perhe $\{B^\varepsilon(t,u)\}$ siirtymätodennäköisyysmatriiseja, joka määräytyy kaavan (9.15) mukaisesti, kun Q korvataan matriisilla Q^ε. Kaavan sarja suppenee tasaisesti, kun ε vaihtelee alueessa $[0,1]$, joten

$$B^\varepsilon(t,u) \to B(t,u), \quad \text{kun } \varepsilon \to 0.$$

Koska perhe $\{B^\varepsilon(t,u)\}$ toteuttaa ehdon (9.4), niin samoin toteuttaa $\{B(t,u)\}$. □

9.4 Kolmitilainen malli

Tarkastellaan esimerkkinä kohdan 9 alussa esitettyä kolmitilaista mallia. Intensiteettien μ_{ij} oletetaan täyttävän lauseen 9.1 ehdot. Oletetaan, että x-ikäinen vakuutettu on tilassa 1 hetkellä 0. Ikä on jo huomioitu intensiteeteissä eikä sitä merkitä jatkossa näkyviin. Merkitään lyhyesti $P_k(u) = P_{1k}(0,u)$, $k \in E$. Forward-yhtälöt koskien todennäköisyyksiä $P_k(u)$ ovat

$$\text{(9.22)} \qquad \begin{cases} dP_1(u) &= -\mu_{12}(u)P_1(u)du - \mu_{13}(u)P_1(u)du + \mu_{21}(u)P_2(u)du \\ dP_2(u) &= -\mu_{21}(u)P_2(u)du - \mu_{23}(u)P_2(u)du + \mu_{12}(u)P_1(u)du \\ dP_3(u) &= \mu_{13}(u)P_1(u)du + \mu_{23}(u)P_2(u)du. \end{cases}$$

Yhtälöt on yllä muodostettu suoraan kaaviosta 'virtaus'-ajattelulla. Muodollisesti lauseen 9.1 mukaan ensimmäinen yhtälö on

$$\begin{aligned} dP_1(u) &= \underbrace{P_1(u)\mu_{11}(u)}_{=P_1(u)\left(-\mu_{12}(u)-\mu_{13}(u)\right)} du + P_2(u)\mu_{21}(u)du + P_3(u)\underbrace{\mu_{31}(u)}_{=0} \\ &= [-\mu_{12}(u)P_1(u) - \mu_{13}(u)P_1(u) + \mu_{21}(u)P_2(u)]\,du. \end{aligned}$$

Ryhmän (9.22) alkuehtona on $P_1(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = 0$. Kahdesta ensimmäisestä voidaan ratkaista $P_1(u)$ ja $P_2(u)$. Näistä saadaan $P_3(u)$ käyttäen viimeistä yhtälöä tai helpommin toteamalla, että $P_3(u) = 1 - P_1(u) - P_2(u)$.

Markovilainen malli ei välttämättä kuvaa todellisuutta kovin hyvin. Esimerkiksi pitkä työkyvyttömyysaika vaikuttaa vakuutetun tulevaisuuden näkymiin. Tätä ominaisuutta ei edellä esitetty malli pysty tuottamaan. Parannusta voidaan hakea lisäämällä tiloja malliin. Esimerkiksi tilan 2 (työkyvytön) jakaminen työkyvyttömyyden syyn mukaan saattaisi parantaa asiaa. Tätä havainnollistaa kuva 9.4. Intensiteetit tiloihin $2a$ ja $2b$ ovat siis tyypillisesti erilaisia. Sama koskee mainituista tiloista lähteviä intensiteettejä.

Voidaan myös ajatella, että aiempien työkyvyttömyyskertojen lukumäärä tulisi ottaa huomioon tulevaisuutta arvioitaessa. Tällöin voidaan jakaa sekä tila 1 että tila 2 kuvan 9.5 mukaisesti. Tässä esimerkiksi tila $1b$ sisältää informaationa sen, että vakuutettu on ollut vähintään kerran työkyvyttömänä.

Yleisesti ryhmä (9.22) joudutaan ratkaisemaan numeerisesti. Vakiointensiteettien tapauksessa saadaan ratkaisu suljetussa muodossa. Tarkastellaan tätä lähemmin. Oletetaan, että $\mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{23} > 0$. Saadaan

$$\begin{cases} P_1'(u) &= -(\mu_{12} + \mu_{13})P_1(u) + \mu_{21}P_2(u) \\ P_2'(u) &= -(\mu_{21} + \mu_{23})P_2(u) + \mu_{12}P_1(u) \end{cases} \tag{9.23}$$

alkuehdoilla $P_1(0) = 1, P_2(0) = 0$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$P_2(u) = \frac{1}{\mu_{21}}\big[P_1'(u) + (\mu_{12} + \mu_{13})P_1(u)\big]. \tag{9.24}$$

Sijoitetaan tämä jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$P_1''(u) + \underbrace{(\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{21} + \mu_{23})}_{A} P_1'(u) + \underbrace{\big[(\mu_{12} + \mu_{13})(\mu_{21} + \mu_{23}) - \mu_{12}\mu_{21}\big]}_{B} P_1(u) = 0.$$

Tämä on vakiokertoiminen lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka voidaan ratkaista analyyttisesti. Olkoot nimittäin r_1 ja r_2 yhtälön

$$r^2 + Ar + B = 0$$

ratkaisut. Nämä ovat reaalisia, sillä diskriminantti on

$$\begin{aligned} D &= A^2 - 4B \\ &= (\mu_{12} + \mu_{13})^2 + 2(\mu_{12} + \mu_{13})(\mu_{21} + \mu_{23}) + (\mu_{21} + \mu_{23})^2 \\ &\qquad - 4(\mu_{12} + \mu_{13})(\mu_{21} + \mu_{23}) + 4\mu_{12}\mu_{21} \\ &= \big[\mu_{12} + \mu_{13} - (\mu_{21} + \mu_{23})\big]^2 + 4\mu_{12}\mu_{21} > 0. \end{aligned}$$

Nähdään myös, että juuret ovat erisuuret. Olkoot nämä r_1 ja r_2. Tällöin tunnetusti yleinen ratkaisu on

$$P_1(u) = C_1e^{r_1u} + C_2e^{r_2u}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Vakioiden määräämiseksi käytetään ensin alkuehtoa $P_1(0) = 1$, joten

$$C_1 + C_2 = 1. \tag{9.25}$$

Toisaalta yhtälöiden (9.23) nojalla käyttäen alkuehtoa $P_2(0) = 0$ saadaan

$$P_1'(0) = -(\mu_{12} + \mu_{13}).$$

Siis

$$C_1r_1 + C_2r_2 = -(\mu_{12} + \mu_{13}). \tag{9.26}$$

Koska $r_1 \neq r_2$, ratkeavat vakiot C_1 ja C_2 yhtälöistä (9.25) ja (9.26).

Todennäköisyys $P_2(u)$ ratkaistaan sijoittamalla saatu $P_1(u)$ ryhmän (9.23) jälkimmäiseen yhtälöön ja käyttämällä alkuehtoa $P_2(0) = 0$, tai helpommin suoraan yhtälöstä (9.24).

9.5 Polkutarkasteluja

Tarkastellaan kohdan 9.3 mukaisia intensiteettimalleja. Oletetaan, että intensiteetit ovat jatkuvia.

Lemma 9.5. *Olkoon $b > 0$ kiinteä ja*

$$M = \max \left\{ \sum_{p \in E} P_{mp}(u,s)\mu_{pr}(s) \;\Big|\; 0 \le u < s \le b,\, m, r \in E \right\} < \infty.$$

Olkoon $[t,u) \subseteq [0,b)$ mielivaltainen. Silloin

$$\mathbb{P}\big(\textit{välillä } [t,u) \textit{ vähintään } k \textit{ hyppyä}\big) \le C_k (u-t)^k$$

kaikilla $k = 1, 2 \ldots$, missä $C_k = 2N^{2k} M^k$.

Todistus. Merkitään

$$\begin{aligned} u_j^{(n)} &= t + \frac{j(u-t)}{2^n},\ j = 0, 1, \ldots, 2^n, \\ A^{(n)} &= \Big\{ Z\left(u_{j_1}^{(n)}\right) \ne Z\left(u_{j_1+1}^{(n)}\right), \ldots, Z\left(u_{j_k}^{(n)}\right) \ne Z\left(u_{j_k+1}^{(n)}\right), \\ &\qquad\qquad \text{jollain } 0 \le j_1 < \ldots < j_k \le 2^n - 2 \Big\} \end{aligned}$$

ja

$$A = \{\text{vähintään } k \text{ hyppyä välillä } [t,u)\}.$$

Selvästi $A^{(n)} \subseteq A$, joten

$$\mathbb{P}\left(A^{(n)}\right) \le \mathbb{P}(A). \tag{9.27}$$

Olkoon $\omega \in A$. Tällöin on olemassa sellaiset $s_1, \ldots, s_{k+1} \in [t,u)$, $s_1 < s_2 < \ldots < s_{k+1}$, että

$$Z(s_{j+1}) \ne Z(s_j), \quad j = 1, \ldots k.$$

Koska polut ovat oikealta jatkuvia, voidaan määrätä sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$Z(s) = Z(s_j),\, \forall s \in [s_j, s_j + \varepsilon), \quad j = 1, \ldots, k+1.$$

Nähdään, että $\omega \in A^{(n)}$, kun $\frac{u-t}{2^n} < \varepsilon$, joten arvion (9.27) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A^{(n)}\right) = \mathbb{P}(A). \tag{9.28}$$

Selvästi

$$\mathbb{P}\left(A^{(n)}\right) \le \sum_{j_1,\ldots,j_k} \sum_{m_1 \ne r_1} \cdots \sum_{m_k \ne r_k} P_{m_1 r_1}\left(u_{j_1}^{(n)}, u_{j_1+1}^{(n)}\right) \cdots P_{m_k r_k}\left(u_{j_k}^{(n)}, u_{j_k+1}^{(n)}\right).$$

Lauseen 9.1 nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A^{(n)}\right) \le \sum_{j_1,\dots,j_k} \sum_{m_1\neq r_1} \cdots \sum_{m_k \neq r_k} \int_{u_{j_1}^{(n)}}^{u_{j_1+1}^{(n)}} \sum_{p\in E} P_{m_1 p}\left(u_{j_1}^{(n)}, s\right) \mu_{pr_1}(s)ds \\ \cdots \int_{u_{j_k}^{(n)}}^{u_{j_k+1}^{(n)}} \sum_{p\in E} P_{m_k p}\left(u_{j_k}^{(n)}, s\right) \mu_{pr_k}(s)ds \\ \le \binom{2^n}{k} N^{2k} M^k \left(2^{-n}(u-t)\right)^k .\end{aligned}$$

Kun n on riittävän suuri, on raja-arvon (9.28) nojalla

$$P(A) \le 2\mathbb{P}\left(A^{(n)}\right) \le 2N^{2k}M^k(u-t)^k.$$

$\square$

Usein on tarvetta tarkastella todennäköisyyksiä

$$\bar{P}_{jj}(t,u) = \mathbb{P}(\text{tilassa } j \text{ pysytään aikaväli } [t,u])$$

ja

$$\begin{aligned}\bar{P}_{jk}(t,u) = \mathbb{P}(&\text{tilasta } j \text{ siirrytään suoraan tilaan } k \text{ välillä } (t,u) \text{ ja} \\ &\text{siellä pysytään hetkeen } u \text{ saakka}), \quad j \neq k.\end{aligned}$$

Todennäköisyydet tulkitaan ehdollisiksi (ehtona on 'ollaan tilassa j hetkellä t'). Täsmällisesti

$$\begin{aligned}\bar{P}_{jj}(t,u) &= \mathbb{P}\big(Z(s) = j, \forall j \in [t,u] \,\big|\, Z(t) = j\big), \\ \bar{P}_{jk}(t,u) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{s_0\in[t,u]} \{Z(s) = j, \forall s \in [0,s_0), Z(s) = k, \forall s \in [s_0,u]\} \Big|\, Z(t) = j \right).\end{aligned}$$

Huomautus 9.1. Olkoon $u \in [0,b)$ ja $\Delta > 0$ pieni. Silloin

$$P_{jj}(u,u+\Delta) \le \bar{P}_{jj}(u,u+\Delta) + C_2\Delta^2$$

lemman 9.5 nojalla, joten

$$P_{jj}(u,u+\Delta) = \bar{P}_{jj}(u,u+\Delta) + o(1)\Delta$$

tasaisesti, kun $\Delta \to 0$. Jos siis $\varepsilon > 0$ on annettu, niin voidaan määrätä sellainen $\Delta_\varepsilon > 0$, että

$$|\, P_{jj}(u,u+\Delta) - \bar{P}_{jj}(u,u+\Delta) \,| < \varepsilon\Delta$$

kaikilla $u \in [0, b]$, kunhan $\Delta < \Delta_\varepsilon$. Samoin

$$P_{jk}(u, u+\Delta) = \bar{P}_{jk}(u, u+\Delta) + o(1)\Delta$$

tasaisesti välillä $u \in [0, b]$, kun $j \neq k$.

Huomautus 9.2. Hyppyjen lukumäärä kiinteällä välillä $[0, b)$ on äärellinen todennäköisyydellä yksi. Nimittäin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{hyppyjä vähintään } R+1) \\
&\quad \leq \mathbb{P}\left(\text{jollain välillä } \left[0, \frac{b}{R}\right), \left[\frac{b}{R}, \frac{2b}{R}\right), \dots, \left[\frac{(R-1)b}{R}, b\right) \text{ vähintään 2 hyppyä}\right) \\
&\quad \leq RC_2 \left(\frac{b}{R}\right)^2 \to 0, \text{ kun } R \to \infty.
\end{aligned}$$

Lause 9.6. *Olkoon* $\mathbb{P}\big(Z(t) = j \,\big|\, Z(0) = j_0\big) > 0$ *ja* $j, k \in E$, $j \neq k$. *Silloin lauseen 9.1 oletuksin kaikilla* $0 \leq t < u$,

$$\bar{P}_{jj}(t, u) = e^{\int_t^u \mu_{jj}(s)ds}$$

ja

$$\bar{P}_{jk}(t, u) = \int_t^u \bar{P}_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)\bar{P}_{kk}(s, u)ds.$$

Todistus. Olkoon $0 \leq t < u$ ja $\Delta > 0$. Huomautuksen 9.1 nojalla

$$\bar{P}_{jj}(u, u+\Delta) = 1 + \mu_{jj}(u)\Delta + o(1)\Delta, \quad \Delta \to 0.$$

Siispä

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{jj}(t, u+\Delta) - \bar{P}_{jj}(t, u) &= \bar{P}_{jj}(t, u)\big[\bar{P}_{jj}(u, u+\Delta) - 1\big] \\
&= \bar{P}_{jj}(t, u)\mu_{jj}(u)\Delta + o(1)\Delta.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Selvästi $\bar{P}_{jj}(t, \cdot)$ on jatkuva, joten

$$\frac{\partial}{\partial u}\bar{P}_{jj}(t, u) = \bar{P}_{jj}(t, u)\mu_{jj}(u).$$

Koska $\bar{P}_{jj}(t, t) = 1$, saadaan todennäköisyydelle $\bar{P}_{jj}(t, u)$ väitteen mukainen esitys.

Lauseen toisen väitteen todistamiseksi todetaan, että

$$\bar{P}_{jk}(t, u+\Delta) = \bar{P}_{jk}(t, u)\bar{P}_{kk}(u, u+\Delta) + \bar{P}_{jj}(t, u)\bar{P}_{jk}(u, u+\Delta). \tag{9.30}$$

Huomautuksen 9.1 nojalla

$$\bar{P}_{jk}(u, u + \Delta) = P_{jk}(u, u + \Delta) + o(1)\Delta = \mu_{jk}(u)\Delta + o(1)\Delta.$$

Yhdistämällä tämä, (9.29) ja (9.30) saadaan

$$\frac{\partial}{\partial u}\bar{P}_{jk}(t, u) = \bar{P}_{jk}(t, u)\mu_{kk}(u) + \bar{P}_{jj}(t, u)\mu_{jk}(u).$$

Alkuehto on nyt $\bar{P}_{jk}(t, t) = 0$, joten ratkaisu on

$$\begin{aligned}\bar{P}_{jk}(t, u) &= e^{\int_t^u \mu_{kk}(s)ds} \int_t^u \bar{P}_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)e^{-\int_t^s \mu_{kk}(v)dv} ds \\ &= \int_t^u \bar{P}_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)e^{\int_s^u \mu_{kk}(v)dv} ds \\ &= \int_t^u \bar{P}_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)\bar{P}_{kk}(s, u)ds.\end{aligned}$$

□

Markov-prosessi voidaan myös konstruoida hyppyhetkien avulla. Olkoon E_A absorboivien tilojen joukko:

$$E_A = \{j \in E \mid \mu_{jk}(t) = 0, \forall k \neq j, \forall t \geq 0\}.$$

Merkitään

$$\mu_j(t) = \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) \quad \big(= -\mu_{jj}(t)\big).$$

Asetetaan $\tau_0 = 0, \xi_0 = j_0$. Kun $(\tau_0, \xi_0), \ldots, (\tau_n, \xi_n)$ on annettu, annetaan muuttujalle τ_{n+1} tiheysfunktio

$$\mu_{\xi_n}(\tau_1 + \cdots + \tau_n + t)e^{-\int_{\tau_1+\ldots+\tau_n}^{\tau_1+\cdots+\tau_n+t} \mu_{\xi_n}(s)ds}, \quad t \geq 0,$$

kun $\xi_n \notin E_A$ (jos $\xi_n \in E_A$, asetetaan $\tau_{n+1} = \infty$, $\tau_{n+2} = \infty, \ldots$). Tämän jälkeen ξ_{n+1}:lle annetaan todennäköisyydet

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = k) = \frac{\mu_{\xi_n k}(\tau_1 + \cdots + \tau_{n+1})}{\mu_{\xi_n}(\tau_1 + \cdots + \tau_{n+1})}, \quad \forall k \neq \xi_n.$$

Lopuksi olkoon

$$Y(t) = \xi_n, \quad \forall t \in [\tau_1 + \cdots + \tau_n, \tau_1 + \cdots + \tau_{n+1}).$$

Tällöin $\{Y(t)\}$ on Markov-prosessi, jonka intensiteetit ovat $\{\mu_{jk}\}$. Todistus on esitetty lähteessä Iosifescu and Tautu (1973).

Konstruktio antaa erityisesti mahdollisuuden tuottaa Markov-prosessin realisaatioita simuloimalla.

Esimerkki 9.1. Olkoon Markov-prosessi kuten edellä ja alkutila j_0. Olkoon $m \in E$ kiinteä. Kysytään todennäköisyyttä, että prosessi käy tilassa m ennen hetkeä n. Olkoon kysytty todennäköisyys Q. Siis

$$Q = \mathbb{P}\big(Z(t) = m \text{ jollain } t \leq n \,\big|\, Z(0) = j_0\big).$$

Tarkastellaan prosessia Z', jonka tila-avaruus on E, alkutila j_0 ja intensiteetit μ_{ij}, kun $i \neq m$. Intensiteetit μ_{mj} asetetaan nolliksi. Intuitiivisesti,

$$Q = \mathbb{P}\big(Z'(n) = m \,\big|\, Z'(0) = j_0\big). \tag{9.31}$$

Tämä on määrättävissä esimerkiksi forward-yhtälöiden avulla. Perustellaan tulosta (9.31) seuraavassa.

Olkoon K suuri ja $t_r = \frac{nr}{K}, r = 0, 1, \ldots, K$. Tarkastellaan prosessia $\{Z(t)\}$ näissä pisteissä. Olkoon

$$\tau^{(K)} = \begin{cases} \inf\{r \mid Z(t_r) = m\} \\ +\infty, \text{ jos } Z(t_r) \neq m, \forall r. \end{cases}$$

Lemman 9.5 nojalla

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{P}(\tau^{(K)} < \infty) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(\tau^{(K)} < \infty, \text{ jokaisella välillä } [t_k, t_{k+1}] \text{ korkeintaan 1 hyppy}) + o(1), \quad K \to \infty. \end{aligned}$$

Samoin

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{r=1}^{K} \mathbb{P}\left(\tau^{(K)} = r\right) + o(1) \\ &= \sum_{r=1}^{K} \sum_{j_1,\ldots,j_{r-1} \neq m} \bar{P}_{j_0 j_1}(t_0, t_1) \cdots \bar{P}_{j_{r-2} j_{r-1}}(t_{r-2}, t_{r-1}) \bar{P}_{j_{r-1} m}(t_{r-1}, t_r) + o(1). \end{aligned}$$

Lauseen 9.6 nojalla $\bar{P}$-todennäköisyydet ovat samat Z- ja Z'-prosessilla, paitsi jos tulotila on m. Kuitenkin

$$\bar{P}_{j_{r-1} m}(t_{r-1}, t_r) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \bar{P}_{j_{r-1} j_{r-1}} \mu_{j_{r-1} m}(s) ds \big(1 + o(1)\big)$$

tasaisesti, kun $K \to \infty$. Edellä saatu summa approksimoi siis myös todennäköisyyttä $\mathbb{P}\big(Z'(n) = m\big)$, joten (9.31) on tosi.

9.6 Vakuutusmaksut

Tarkastellaan yleistä kohdassa 9.3 esitettyä mallia lauseen 9.1 oletuksin. Oletetaan, että vakuutetulle maksetaan jatkuvaa korvausta intensiteetillä $\bar{S}_j$, kun vakuutettu on tilassa $j, j = 1, \ldots, N$. Määrätään tällaista sopimusta vastaava korvausten pääoma-arvo. Tarpeellinen tieto tätä varten on vakuutetun ikä sopimuksen tekohetkellä. Seuraavassa oletetaan, että tämä on jo huomioitu intensiteeteissä eikä alkuikää merkitä näihin eikä myöskään siirtymätodennäköisyyksiin. Olkoon alkutila j_0.

Olkoot tilaan j saapumishetket $\tau_1, \tau_2, \ldots$ ja vastaavat poistumishetket $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$. Arvo $+\infty$ sallitaan näille hetkille. Korvausta maksetaan tilassa j aikaväleillä

$$(\tau_1, \varrho_1), (\tau_2, \varrho_2), \ldots$$

Huomautuksen 9.2 nojalla korvausjaksoja on äärellinen määrä kompaktilla välillä $[0, b]$ todennäköisyydellä 1. Välillä $[0, b]$ tilassa j maksettavien korvausten nykyarvo on

$$\begin{aligned}
K_j(b) &\doteq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_k < b) e^{-\int_0^{\tau_k} \delta(s)ds} \int_{\tau_k}^{\varrho_k \wedge b} \bar{S}_j e^{-\int_{\tau_k}^{t} \delta(s)ds} dt \\
&= \bar{S}_j \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_k < b) \int_{\tau_k}^{\varrho_k \wedge b} e^{-\int_0^t \delta(s)ds} dt \\
&= \bar{S}_j \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^b e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \mathbb{1}(\tau_k \le t < \varrho_k) dt \\
&= \bar{S}_j \int_0^b e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_k \le t < \varrho_k) dt.
\end{aligned}$$

Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_j(b)) &= \bar{S}_j \int_0^b e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \, \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_k \le t < \varrho_k) | Z(0) = j_0 \right) dt \\
&= \bar{S}_j \int_0^b e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \mathbb{P}\big(Z(t) = j \,\big|\, Z(0) = j_0\big) dt \\
&= \bar{S}_j \int_0^b e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{j_0 j}(0, t) dt.
\end{aligned}$$

Jos K_j on tilassa j maksettavien korvausten nykyarvo, niin näiden pääoma-arvo on

$$\mathbb{E}(K_j) = \bar{S}_j \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{j_0 j}(0, t) dt.$$

Vakuutuksen nettokertamaksu on siis

$$P = \sum_{j \in E} \mathbb{E}(K_j) = \sum_{j \in E} \bar{S}_j \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{j_0 j}(0, t) dt.$$

Mikäli vakuutusmaksuja maksetaan vain, kun vakuutettu on tilassa j_0 ja suoritukset ovat jatkuvia intensiteettinä $\bar{P}$, saadaan ekvivalenssiperiaatteen mukainen $\bar{P}$ ehdosta

$$\bar{P}\int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{j_0j_0}(0,t)dt = P.$$

Mikäli maksua maksetaan korkeintaan h vuotta (ikään $x+h$ asti), määräytyy intensiteetti ehdosta

$$\bar{P}\int_0^h e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{j_0j_0}(0,t)dt = P.$$

9.7 Vastuuvelka

Tarkastellaan kohdan 9.6 mukaista vakuutusta hetkellä $t > 0$. Oletetaan myös, että vakuutusmaksua maksetaan tilassa j_0 jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}$ korkeintaan h vuotta sopimuksen tekohetkestä.

Vastuuvelka määritellän aiempaan tapaan tulevien korvausten ja vakuutusmaksujen erotuksen pääoma-arvona. Tämä riippuu vakuutetun tilasta hetkellä t, mutta ei riipu siitä, miten tilaan on tultu (Markov-ominaisuuden nojalla). Vastuuvelka on luonnollista tulkita ehdolliseksi odotusarvoksi ehtona 'nykytila'.

Olkoon i vakuutetun tila hetkellä t. Tulevien korvausten pääoma-arvo on ilmeisesti

$$\sum_{j\in E} \bar{S}_j \int_t^\infty e^{-\int_t^u \delta(s)ds} P_{ij}(t,u)du.$$

Jos $t < h$, on tulevien maksujen pääoma-arvo

$$\bar{P}\int_t^h e^{-\int_t^u \delta(s)ds} P_{ij_0}(t,u)du.$$

Mikäli vakuutettu saa korvausta tilassa i, tulkitaan yleensä tähän jo alkaneeseen korvausjaksoon liittyvien korvausten pääoma-arvo *korvausvastuuksi.* Myöhemmin alkavien jaksojen korvausten pääoma-arvot tulkitaan *vakuutusmaksuvastuuksi.* Korvausvastuun osuus on

$$\bar{S}_i \int_t^\infty e^{-\int_t^u \delta(s)ds} \bar{P}_{ii}(t,u)du,$$

missä $\bar{P}_{ii}(t,u)$ on määrättävissä lauseen 9.6 avulla.

Vastuuvelkaa voidaan nytkin kuvata Thielen yhtälöillä. Olkoon $V_i(t)$ vastuuvelka hetkellä t, kun vakuutettu on tällöin tilassa i.

Lyhyellä aikavälillä $(t, t+\Delta)$ vakuutettu siirtyy tilaan $j \neq i$ suurusluokkaa $\mu_{ij}(t)\Delta$ olevalla todennäköisyydellä. Huomautuksen 9.1 nojalla riittää tarkastella realisaatioita, joissa hyppyjä on korkeintaan yksi välillä $(t, t+\Delta)$. Saadaan kaavio

$$V_i(t)$$

$$\cdots \quad \mu_{ij}(t)\Delta \qquad \cdots \qquad 1 - \textstyle\sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta \qquad \cdots$$

$$V_j(t+\Delta) \quad (j \neq i) \qquad\qquad V_i(t+\Delta) + \bar{S}_i\Delta - \bar{P}\Delta\mathbb{1}(i = j_0)$$

Siis

$$\begin{aligned} V_i(t) \approx \sum_{j \neq i} V_j(t)\mu_{ij}(t)\Delta + \left(1 - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta\right)&\big(1 - \delta(t)\Delta\big) \\ &\cdot \big(V_i(t+\Delta) + \bar{S}_i\Delta - \bar{P}\Delta\mathbb{1}(i = j_0)\big). \end{aligned}$$

Saadaan differentiaaliyhtälö

$$V_i'(t) = \delta(t)V_i(t) + \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\big(V_i(t) - V_j(t)\big) - \bar{S}_i + \bar{P}\mathbb{1}(i = j_0).$$

Tämä toteutuu kaikissa tiloissa $i \in E$. Syntyvä differentiaaliyhtälöryhmä pystytään ratkaisemaan lähinnä numeerisesti. Ratkaisu on yksikäsitteinen alkuehdoilla

$$\begin{cases} V_{j_0}(0) = 0 \\ V_i(0) = \sum_{j \in E} \bar{S}_j \int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{ij}(0,t)dt - \bar{P} \int_0^h e^{-\int_0^t \delta(s)ds} P_{ij_0}(0,t)dt, \quad i \neq j_0. \end{cases}$$

Jos korvausten maksaminen on rajoitettu välille $(0, n)$, missä $n \geq h$, voidaan reunaehtoina käyttää myös yhtälöitä

$$V_i(n) = 0, \quad \forall i \in E.$$

Lisälähteitä kohtaan 9: Haberman and Pitacco (1999), Iosifescu and Tautu (1973) ja Norberg (1991).

10 Vakavaraisuustarkasteluja

Oletetaan, että yhtiöllä on hetkellä nolla pääomaa määrä U_0. Voimassaolevista vakuutuksista aiheutuu yhtiölle vuonna k meno ξ_k. Tulkinnallisesti ξ_k edustaa maksettuja korvauksia vähennettynä saaduilla vakuutusmaksuilla. Oletetaan, että suoritukset tapahtuvat vuosien lopussa eli hetkinä $k, k = 1, 2, \ldots$.

Tarkastellaan hetkellä nolla yhtiön kykyä selviytyä sitoumuksistaan. Vastuuvelka olkoon

$$V(0) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_{0,k}\xi_k \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right),$$

missä $D_{0,k}$ on k vuoden diskonttaustekijä hetkellä nolla ja $\mathcal{F}_0$ on sopiva informaatio (sigma-algebra, joka voisi olla $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ tarkastelujen alussa). Jos $U_0 < V(0)$, voidaan katsoa, että yhtiö on vararikossa.

Tarkastellaan tilannetta hetkellä 1+. Kiinnitetään huomio pelkästään olemassa oleviin sopimuksiin (uusia vakuutuksia ei myönnetä). Oletetaan, että yhtiö sijoittaa hetkellä 0 hallussaan olevat varat ja saa tuottoasteen R_1. Tämä tarkoittaa, että varat hetkellä 1+ ovat

$$U_1 = (1 + R_1)U_0 - \xi_1.$$

Vastuuvelka on

$$V(1) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{\infty} D_{1,k-1}\xi_k \,\middle|\, \mathcal{F}_1\right),$$

missä $D_{1,j}$ on j vuoden diskonttaustekijä hetkellä yksi ja $\mathcal{F}_1$ vakuutettujen tiloja kuvaava informaatio. Mahdollisesti myös diskonttaukseen liittyvää tietoa sisältyy sigma-algebraan $\mathcal{F}_1$ (aiemmasta poiketen sallitaan, että esimerkiksi $D_{1,1} \neq D_{0,2}/D_{0,1}$). Jos $U_1 < V(1)$, on yhtiö vararikossa.

Hetkellä 1+ varat sijoitetaan jälleen. Olkoon tuottoaste R_2. Varat hetkellä 2+ ovat

$$U_2 = (1 + R_1)(1 + R_2)U_0 - (1 + R_2)\xi_1 - \xi_2$$

ja vastuuvelka

$$V(2) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=3}^{\infty} D_{2,k-2}\xi_k \,\middle|\, \mathcal{F}_2\right).$$

Yleisesti varat hetkellä $j+$ ovat

$$U_j = (1 + R_1)\cdots(1 + R_j)U_0 - \sum_{k=1}^{j}(1 + R_{k+1})\cdots(1 + R_j)\xi_k$$

ja vastuuvelka on

$$V(j) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} D_{j,k-j}\xi_k \,\middle|\, \mathcal{F}_j\right).$$

Määritellään vararikkohetki τ ehdosta

$$\tau = \begin{cases} \inf\{j \geq 0 \,|\, U_j < V(j)\} \\ +\infty, \text{ jos } U_j \geq V(j), \forall j. \end{cases} \tag{10.1}$$

Pyritään arvioimaan seuraavassa todennäköisyyttä $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ sopivasti yksinkertaistetussa mallissa. Yleisempiä malleja pystytään lähestymään ainakin simuloinnin avulla.

10.1 Pelkistetty malli

Oletetaan seuraavassa, että

$$D_{j,k} = \big[(1 + R_{j+1}) \cdots (1 + R_{j+k})\big]^{-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \; k = 1, 2, \dots. \tag{10.2}$$

Tämä on tietyssä mielessä luonnollista, koska diskonttaus suoritetaan tällöin näköpiirissa olevien tuottojen avulla. Oletus ei välttämättä ole kuitenkaan realistinen, sillä esimerkiksi lainsäädäntö saattaa edellyttää muita diskonttaustapoja vastuuvelan laskennassa. Tuottoasteet $R_1, R_2, \dots$ on tulkittava hetkellä 0 laaditun mallin mukaisiksi satunnaismuuttujiksi.

Merkitään lyhyesti

$$D_k = D_{0,k} = \big[(1 + R_1) \cdots (1 + R_k)\big]^{-1}.$$

Tällöin

$$D_{j,k} = \frac{D_{j+k}}{D_j} \quad \text{ja} \quad D_{j,k-j} = \frac{D_k}{D_j}.$$

Tehdään seuraavat oletukset.

(A1) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ on sigma-algebrajono,

(A2) R_k ja ξ_k ovat $\mathcal{F}_k$-mitallisia, $\forall k$,

(A3) $\mathbb{P}(R_k > -1) = 1, \forall k$,

(A4) $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |D_k \xi_k|\right) < \infty$,

(A5) $(1 + R_k)^{-1}$ on integroituva, $\forall k$.

Merkitään

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \xi_k.$$

Vastuuvelka hetkellä j on

$$\begin{aligned} V(j) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \left[(1+R_{j+1})\cdots(1+R_k)\right]^{-1} \xi_k \,|\, \mathcal{F}_j \right) \\ &= D_j^{-1}\,\mathbb{E}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} D_k \xi_k \,|\, \mathcal{F}_j \right) = D_j^{-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{E}\left(D_k \xi_k \,|\, \mathcal{F}_j\right). \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned} M_j &= \mathbb{E}(M \,|\, \mathcal{F}_j) \\ &= \sum_{k=1}^{j} D_k \xi_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{E}\left(D_k \xi_k \,|\, \mathcal{F}_j\right). \end{aligned}$$

Nyt $U_j < V(j)$ merkitsee sitä, että

$$U_0 - \sum_{k=1}^{j} D_k \xi_k < \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{E}\left(D_k \xi_k \,|\, \mathcal{F}_j\right)$$

eli että $M_j > U_0$. Vararikkohetki τ voidaan siis esittää muodossa

$$\tau = \begin{cases} \inf\{j \geq 0 \,|\, M_j > U_0\} \\ +\infty, \ \text{jos } M_j \leq U_0, j = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{10.3}$$

Olkoon edelleen $L_0 = M_0 = V(0)$ ja

$$L_j = M_j - M_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Tulkinnallisesti, M_j kuvaa hetkeen j mennessä syntynyttä tappiota diskontattuna hetkeen nolla. Vastuuvelka otetaan huomioon luonnollisella tavalla. Vastaavasti L_j kuvaa vuoden j tappiota. Selvästi

$$L_j = D_j \xi_j + D_j V(j) - D_{j-1} V(j-1).$$

Lause 10.1. *Oletetaan (A1) - (A5). Silloin*

(i) $\{(M_j, \mathcal{F}_j) \,|\, j = 0, 1, 2, \ldots\}$ *on martingaali,*

(ii) $\mathbb{E}(L_{j+k} \,|\, \mathcal{F}_j) = 0$ *kaikilla* $j \geq 0$, $k \geq 1$,

(iii) $\mathbb{E}(L_j L_{j+k}) = 0$ *kaikilla* $j \geq 0$, $k \geq 1$,

(iv) $Var M_j = \sum_{k=0}^{j} Var L_k = \sum_{k=0}^{j} \mathbb{E}(L_k^2) - V(0)^2$ *kaikilla* $j \geq 0$,

(v) $\lim_{j\to\infty} M_j = M$ *m.v.*

Huomautus 10.1. Kohtaa *(iv)* kutsutaan Hattendorfin kaavaksi. Selvästi

$$M_j = \sum_{k=0}^{j} L_k.$$

Tämän varianssi on summattavien varianssien summa, vaikka nämä eivät olekaan riippumattomia.

Lauseen 10.1 todistus. (i) Oletuksen (A4) nojalla M_j on integroituva, $j = 1, 2, \ldots$. Lisäksi ehdollisen odotusarvon iteratiivisuusominaisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(M_{j+1} \,|\, \mathcal{F}_j\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_{j+1}\right) \,|\, \mathcal{F}_j\right) \\ &= \mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_j\right) = M_j. \end{aligned}$$

(ii) Kohdan (i) tapaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(L_{j+k} \,|\, \mathcal{F}_j\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_{j+k}\right) - \mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_{j+k-1}\right) \,|\, \mathcal{F}_j\right) \\ &= \mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_j\right) - \mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_j\right) = 0. \end{aligned}$$

(iii) Koska L_j on $\mathcal{F}_{j+k-1}$-mitallinen, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(L_j L_{j+k}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(L_j L_{j+k} \,|\, \mathcal{F}_{j+k-1}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(L_j \mathbb{E}\left(L_{j+k} \,|\, \mathcal{F}_{j+k-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Väitetty tulos seuraa tästä, koska kohdan (ii) nojalla $\mathbb{E}\left(L_{j+k} \,|\, \mathcal{F}_{j+k-1}\right) = 0$.

(iv) Selvästi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var} M_j &= \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{j} L_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \mathrm{Var}(L_k) + 2 \sum_{0\le k<h\le j} \mathrm{Cov}(L_k, L_h). \end{aligned}$$

Kohtien (ii) ja (iii) nojalla

$$\mathrm{Cov}(L_k, L_h) = \mathbb{E}(L_k L_h) - \mathbb{E}(L_k)\mathbb{E}(L_h) = 0.$$

Siispä

$$\begin{aligned} \mathrm{Var} M_j &= \sum_{k=0}^{j} \mathrm{Var}(L_k) \\ &= \mathrm{Var} L_0 + \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left(L_k^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \mathbb{E}\left(L_k^2\right) - \mathbb{E}\left(M_0^2\right). \end{aligned}$$

(v) Todistus sivuutetaan. Katso esimerkiksi Chow and Teicher (1978), kohta 11.1, seuraus 4. □

10.2 Vararikkotodennäköisyyden arvioita

Olkoon $\tau = \tau(U_0)$ kuten kaavassa (10.3) ja

$$\psi(U_0) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$$

vararikkotodennäköisyys kohdan 10.1 pelkistetyssä mallissa.

Lemma 10.2. *Lauseen 10.1 oletuksin* $\psi(U_0) = 0$ *jos ja vain jos* $\mathbb{P}(M > U_0) = 0$.

Todistus. Olkoon

$$\bar{M} = \sup\big\{M_j \,|\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}.$$

Ilmeisesti

$$\{\tau < \infty\} = \{\bar{M} > U_0\}.$$

Koska $M \le \bar{M}$, niin $\mathbb{P}(M > U_0) = 0$, jos $\psi(U_0) = 0$.

Olkoon nyt $\mathbb{P}(M > U_0) = 0$. Merkitään

$$B_j = \{M_j > U_0\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Silloin $B_j \in \mathcal{F}_j$ ja

$$\begin{aligned} U_0\mathbb{P}(B_j) &\le \mathbb{E}(M_j \mathbb{1}(B_j)) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M \,|\, \mathcal{F}_j\right) \mathbb{1}(B_j)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(M \mathbb{1}(B_j)\right) \le U_0\mathbb{P}(B_j). \end{aligned}$$

Nähdään, että

$$U_0\mathbb{P}(M_j > U_0) = \mathbb{E}(M_j \mathbb{1}(M_j > U_0)),$$

joten $\mathbb{P}(M_j > U_0) = 0$. Siispä

$$\psi(U_0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\{M_j > U_0\}\right) = 0.$$

□

Lemma 10.3. *Olkoon* $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *konveksi funktio ja* $U_0 > 0$. *Oletetaan, että* ϕ *on kasvava kaikkialla ja aidosti kasvava välillä* $(0, \infty)$. *Silloin*

$$\{\tau < \infty\} = \big\{\sup\{\phi(M_j) \,|\, j = 0, 1, 2, \ldots\} > \phi(U_0)\big\}.$$

Todistus. Suoraviivainen. □

Lause 10.4. *Olkoon ϕ kuten lemmassa 10.3. Silloin lauseen 10.1 oletuksin*

$$\mathbb{E}\big(\phi(M)\big) \geq \phi(U_0)\psi(U_0) + \mathbb{E}\big(\phi(M)\mathbb{1}(\tau = \infty)\big) \tag{10.4}$$

ja

$$\psi(U_0) \leq \frac{E\big(\phi(M)\big)}{\phi(U_0)} \tag{10.5}$$

kaikilla $U_0 > 0$.

Todistus. Koska

$$E\big(\phi(M)\big) = \mathbb{E}\big(\phi(M)\mathbb{1}(\tau < \infty)\big) + \mathbb{E}\big(\phi(M)\mathbb{1}(\tau = \infty)\big)$$

ja $\phi(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, riittää näyttää, että

$$\mathbb{E}\big(\phi(M)\mathbb{1}(\tau < \infty)\big) \geq \phi(U_0)\psi(U_0). \tag{10.6}$$

Olkoon

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{\omega \in \Omega \,|\, \phi(M_0) > \phi(U_0)\} \\
A_1 &= \{\omega \in \Omega \,|\, \phi(M_1) > \phi(U_0)\} \setminus A_0 \\
A_2 &= \{\omega \in \Omega \,|\, \phi(M_2) > \phi(U_0)\} \setminus (A_0 \cup A_1) \\
\ldots & \quad\ldots
\end{aligned}$$

Tällöin $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ovat erillisiä. Lemman 10.3 nojalla

$$\{\tau < \infty\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j.$$

Koska $A_j \in \mathcal{F}_j$, niin

$$\mathbb{E}\left(\phi(M)\mathbb{1}(A_j)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\phi(M) \,|\, \mathcal{F}_j)\mathbb{1}(A_j)\right).$$

Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(\phi(M) \,|\, \mathcal{F}_j) \geq \phi(\mathbb{E}(M \,|\, \mathcal{F}_j)) = \phi(M_j),$$

joten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\phi(M)\mathbb{1}(A_j)\right) &\geq \mathbb{E}\left(\phi(M_j)\mathbb{1}(A_j)\right) \\
&\geq \phi(U_0)\mathbb{P}(A_j).
\end{aligned}$$

Saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(M)) &\geq \mathbb{E}(\phi(M)\mathbb{1}(\tau < \infty)) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(\phi(M)\mathbb{1}(A_j)) \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \phi(U_0)\mathbb{P}(A_j) = \phi(U_0)\psi(U_0).\end{aligned}$$

□

Olkoon c rajamuuttujan M kumulantit generoiva funktio,

$$c(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{tM}\right) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ja c^* tämän konveksi konjugaatti,

$$c^*(v) = \sup\left\{tv - c(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Seuraus 10.5. *Olkoon $c(t) < \infty$ jollain $t > 0$ ja $\mathbb{E}(M) < U_0$. Silloin $c^*(U_0) > 0$ ja lauseen 10.1 oletuksin*

$$\psi(U_0) \leq e^{-c^*(U_0)}.$$

Todistus. Olkoon $t > 0$ ja $\phi(x) = e^{tx}, x \in \mathbb{R}$. Lause 10.4 antaa arvion

$$\psi(U_0) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{tM}\right)}{e^{tU_0}} = e^{-(tU_0 - c(t))},$$

joten

$$\psi(U_0) \leq e^{-\sup\{tU_0 - c(t) \,|\, t > 0\}}.$$

Tunnetusti c on konveksi ja $c'(0+) = \mathbb{E}(M)$. Koska $U_0 > \mathbb{E}(M)$, niin

$$\begin{aligned}&\sup\{tU_0 - c(t) \,|\, t > 0\} \\ =\ &\sup\{tU_0 - c(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = c^*(U_0).\end{aligned}$$

Geometrisesti nähdään, että $c^*(U_0) > 0$. □

Esimerkki 10.1. Oletetaan, että kannassa on vain yksi vakuutettu. Yhtiö maksaa kuolinvuoden lopussa summan S, jos kuolintapaus sattuu ennen hetkeä n. Vakuutettu on x-ikäinen ja vakuutus maksetaan kertamaksulla P. Olkoot kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ positiivisa vakioita. Siis $D_k = e^{-\delta k}$.

Kertamaksu P ei näy ξ-muuttujissa, vaan se lisätään alkupääomaan. Niinpä

$$\xi_k = S\mathbb{1}(k - 1 \leq T < k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

missä T on vakuutetun jäljellä oleva elinaika.

Luonnollinen valinta sigma-algebroiksi on

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_k &= \sigma\left(\mathbb{1}(0 \le T < 1), \ldots, \mathbb{1}(k-1 \le T < k)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Tällöin vastuuvelka hetkellä $0+$ on

$$V(0) = S \sum_{k=1}^{n} e^{-\delta k} \ {}_{k-1}p_x \ q_{x+k-1}$$

ja

$$V(j) = \mathbb{1}(T \ge j) S \sum_{k=j+1}^{n} e^{-\delta(k-j)} \ {}_{k-j-1}p_{x+j} \ q_{x+k-1}.$$

Yhtiön varat hetkellä j ovat

$$U_j = e^{\delta j} U_0 - \sum_{k=1}^{j} e^{\delta(j-k)} \xi_k.$$

Ilmeisesti

$$V(j) = \mathbb{1}(T \ge j) S (e^{\mu} - 1) \frac{1 - e^{-(n-j)(\delta+\mu)}}{e^{\delta+\mu} - 1}.$$

Oletetaan, että $U_0 > V(0)$. Tämä on luonnollista, koska U_0 sisältää vakuutusmaksun P. Jos vakuutettu on elossa hetkellä j, on

$$U_j = e^{\delta j} U_0 \quad \text{ja} \quad V(j) \le V(0) < U_0.$$

Siis yhtiö ei ole vararikossa. Nähdään, että vararikko voi sattua vain kuolinvuoden lopussa. Edelleen

$$M = \begin{cases} e^{-\delta k} S, & \text{jos } k-1 \le T < k, \quad k = 1, \ldots, n \\ 0, & \text{jos } \quad T \ge n. \end{cases}$$

Jos nyt $T \in [j-1, j)$, missä $j \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$U_k = \begin{cases} e^{\delta k} U_0, & \text{jos } k \le j-1 \\ U_j = e^{\delta j} U_0 - S, & \text{jos } k = j \\ U_k = e^{\delta k} U_0 - e^{\delta(k-j)} S, & \text{jos } k = j+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Vararikko sattuu, jos $S > e^{\delta j} U_0$. Jos $j = j_0$ on suurin indeksi, jolle tämä toteutuu ja $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\begin{aligned}\psi(U_0) &= \mathbb{P}(T \le j_0) \\ &= {}_{j_0}q_x = 1 - e^{-\mu j_0}.\end{aligned}$$

Valitaan lauseessa 10.4
$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ x^\alpha, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$
missä $\alpha \ge 1$. Tällöin
$$\mathbb{E}(\phi(M)) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\delta k}\, S^\alpha \,{}_{k-1}p_x\, q_{x+k-1}$$
ja

$$\begin{aligned} \psi(U_0) &\le \left(\frac{S}{U_0}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\delta k}\, {}_{k-1}p_x\, q_{x+k-1} \\ &= \left(\frac{S}{U_0}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\delta k}\, e^{-\mu(k-1)}\,(1-e^{-\mu}) \\ &= \left(\frac{S}{U_0}\right)^\alpha e^{-\alpha\delta}\,(1-e^{-\mu})\frac{1-e^{-(\alpha\delta+\mu)n}}{1-e^{-(\alpha\delta+\mu)}}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Jos $S \le e^\delta U_0$, on $\psi(U_0) = 0$. Yläraja-arvio antaa saman tuloksen, jos $S < e^\delta U_0$ (annetaan $\alpha \to \infty$).

Olkoon erityisesti $U_0 = 10$, $S = 12$, $\delta = 0.03$, $\mu = 0.01$ ja $n = 20$. Tällöin $j_0 = 6$ ja
$$\psi(U_0) = {}_{20}q_x \approx 0.058.$$
Yläraja-arvio kaavassa (10.7) on

α	Yläraja
1	0.163
2	0.150
3	0.143
4	0.139
5	0.138
6	0.140
7	0.145
8	0.151
9	0.160
10	0.171.

Lisälähteitä kohtaan 10: Papatriandafylow and Waters (1984) ja Chow and Teicher (1978).

Viitteet

Chow, Y. and H. Teicher (1978). *Probability Theory*. New York: Springer.

Dickson, D., M. Hardy, and H. Waters (2013). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press.

Haberman, S. and E. Pitacco (1999). *Actuarial Models for dissability Insurance*. Chapman & Hall /CRC.

IAFA (2000). *Financial Mathematics (of core reading)*. Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

Iosifescu, M. and P. Tautu (1973). *Stochastic Processes and Applications in Biology and Medicin I, Theory*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

Milbrodt, H. and M. Helbig (1999). *Matematische Methoden der Pensionversicherung*. Berlin: Walter de Gruyter.

Möller, T. (2000). *Quadratic Hedging approaches and Indifference Pricing in Insurance*. Ph.D. dissertation, University of Copenhagen.

Norberg, R. (1991). Reserves in life and pension insurance. *Scand. Actuarial J.*, 3–24.

Norberg, R. (1998). *Lecture notes on Life Insurance Mathematics*. University of Copenhagen.

Norberg, R. (2001). On bonus and bonus prognoses in life insurance. *Scand. Actuarial J.*, 126–147.

Papatriandafylow, A. and H. Waters (1984). Martingales in life insurance. *Scand. Actuarial J.*, 210–230.

Pesonen, M., P. Soininen, and T. Tuominen (2014). *Henkivakuutusmatematiikka*. Finanssi- ja vakuutuskustannus Oy.

Ramlau-Hansen, H. (1995). Distribution of surplus in life insurance. *Astin Bulletin*, 57–81.