Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 7, 5.11.2014
Huom. ke 3.12. klo 12-14 on laskuharjoitusten tilalla luento, sali B322
Huom. ti 9.12. klo 16-18 on luennon tilalla laskuharjoitus, sali C123

1. Yhtiöllä on hetkellä nolla N vakuutusta, joista kustakin korvataan 20 vuoden kuluttua määrä S_{20}, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Korvaus S_{20} on erään arvopaperin hinta hetkellä 20. Oletetaan, että $\mathbb{P}(S_{20} > 0) = 1$ ja että hinta hetkellä nolla on $S_0 = 1$.

Vakuutettujen elinajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Iässä x kuolevuus on $\mu(x) = be^{cx}$, missä $b = 0.00005$ ja $c = 0.1$. Vakuutetut ovat kaikki 50-vuotiaita. Kukin vakuutettu maksaa hetkellä nolla kertamaksun $(1+\lambda)_{20}p_{50}S_0$, missä $\lambda > 0$ on varmuuslisä. Oletetaan edelleen, että elinajat ovat riippumattomia mainitun arvopaperin hintakehityksestä.

Yhtiöllä on hallussaan alkupääomaa määrä U_0. Tämä ja saadut vakuutusmaksut sijoitetaan hetkellä nolla korvauksen perustana olevaan arvopaperiin. Hetkellä 20 yhtiö myy arvopapereita korvauksiin tarvittavan määrän. Arvioi keskeisen raja-arvolauseen avulla todennäköisyyttä sille, että yhtiö ei selviä sitoumuksistaan, kun $N = 100$, $\lambda = 0.05$ ja $U_0 = 10$.

2. Kuolemanvaravakuutuksessa maksetaan korvaus S_k vuoden k lopussa, jos vakuutettu kuolee vuoden k aikana, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Vakuutettu maksaa vuoden k alussa vakuutusmaksun $P_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, mikäli on tällöin elossa. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio ja kuolevuus μ. Olkoon edelleen V_k elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä k juuri ennen erän P_k maksamista. Todista, että

$$e^{\delta}(V_k + P_k) = q_{x+k}S_k + p_{x+k}V_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Osoita, että kaava pätee myös kun $k = n-1$, kun $V_n = 0$.

3. (jatkoa) Olkoon vakuutettu elossa vuoden k alussa ja $T(x+k)$ jäljellä oleva elinaika. Vuoden k satunnaistulos R_k määritellään ehdosta

$$R_k = P_k - S_k\mathbb{1}(T(x+k) < 1) + V_k - V_{k+1}\mathbb{1}(T(x+k) \geq 1).$$

Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_k) = (1 - e^{\delta})(V_k + P_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

4. Elämänvaravakuutuksessa maksetaan korvaus S vuoden n lopussa, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Vakuutettu maksaa koko kauden ajan vakuutusmaksuja jatkuvasti ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Olkoon vakuutettu x-ikäinen hetkellä nolla, korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio, kuolevuus μ ja maksuintensiteetti $\bar{P}(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$. Olkoon $V(t)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$. Osoita, että

$$V(t) = SD_{x+n}/D_{x+t} - \int_t^n \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+t}du = \int_0^t \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+t}du,$$

missä $D_y = e^{-\int_0^y(\delta+\mu(s))ds}$ alueessa $y \geq 0$.

5. (jatkoa) Elämänvaravakuutuksessa vakuutettu maksaa jatkuvaa vakuutusmaksua haluamallaan intensiteetillä (jota ei päätetä sopimusta tehtäessä). Jos vakuutettu on elossa hetkellä n, suorittaa yhtiö korvauksen $\int_0^n \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+n}du$, missä $\bar{P}(u), u \in (0, n)$, on toteutunut intensiteetti, jolla vakuutusmaksuja on maksettu. Tee perusteltu ehdotus elossa olevaa vakuutettua koskevaksi vastuuvelaksi hetkellä $t \in (0, n)$.