**Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 3, 1.10.2014**

1. Korkomallissa hetkellä nolla tehtävä talletus $C$ kasvaa korkoa siten, että hetkellä $t \in (0,2)$ on nostettavissa määrä

$$C(t) = \begin{cases} Ce^{\delta_0 t + at^2/2}, \text{ kun } t \in [0,1) \\ Ce^{\delta_0 t + a/2 + a(t-1)^2/2}, \text{ kun } t \in [1,2), \end{cases}$$

missä $\delta_0$ ja $a$ ovat positiivisia vakioita. Määrää sellainen korkoutuvuus, että vaatimus toteutuu.

2. Olkoon kuolevuus $\mu$ sellainen, että vastasyntyneen elinajan odotusarvo on äärellinen. Olkoon $x$-ikäisen jäljellä oleva elinaika $T(x)$ ja $e(x) = \mathbb{E}(T(x))$. Osoita, että

$$e'(x) = \mu(x)e(x) - 1$$

$\mu$:n jatkuvuuspisteissä. Todista tuloksen avulla, että jos $e(x)$ ei riipu $x$:stä niin $T$ on eksponentiaaliseti jakautunut.

3. Olkoon kuolevuus $\mu$ ja $x$-ikäisen jäljellä oleva elinaika $T(x)$. Oletetaan, että $\mu$ on positiivinen ja kasvava funktio. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T(x) > t) \leq e^{-t\mu(x)}, \quad t > 0,$$

ja

$$\mathbb{E}(T(x)) \leq 1/\mu(x), \quad x > 0.$$

4. Määrää Makeham-kuolevuuteen liittyvä elinajan kertymäfunktio sekä elossapysymistodennäköisyydet ${}_tp_x$ $(t > 0, x > 0)$. Osoita, että mallissa $y$-ikäisen jäljellä olevaan elinaikaan liittyvä kuolevuus on myös eräs Makeham-kuolevuus $(y > 0)$.

5. Olkoot vallitsevat kuolinsyyt $1, \ldots, n$ sekä näitä vastaavat hypoteettiset vastasyntyneen elinajat $T_1, \ldots, T_n$. Nämä oletetaan toisistaan riippumattomiksi satunnaismuuttujiksi. Olkoon $F$ elinajan $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ kertymäfunktio ja $\mu_i$ elinaikaan $T_i$ liittyvä kuolevuus, $i = 1, \ldots, n$. Oletetaan, että kuolevuudet ovat jatkuvia ja että $F(x) < 1$, $\forall x > 0$.

Olkoon

$$G_i^x(t) = \mathbb{P}(T \leq x + t, \text{ kuolinsyy } = i \mid T > x), \quad t > 0.$$

Johda esitys funktion $G_i^x$ derivaatalle kuolevuuden $\mu_i$ ja kertymäfunktion $F$ avulla.