Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 6, ratkaisuehdotuksia, 5.12.2014
Valter Pohjola

Ratkaisu 1. Merkitään $\mathbf{z} = (x, y)$ ja kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan ensin kriittiset pisteet. Nämä saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} 2y - 2 = 0, \\ -x - 2y = 0. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että systeemillä on kriittinen piste $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Määritetään seuraavaksi tämän laatu. Riittää tutkia homogeeniyhtälön kriittistä pistettä $(0, 0)$ (katso monisteen sivu 84). Nyt

$$\det(A) = 2 \neq 0,$$

joten $(-2, 1)$ on siis Lauseen 6.2 nojalla ainoa kriittinen piste. Lasketaan seuraavaksi ominaisarvot. Ensinnäkin

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1 + i)(\lambda + 1 - i).$$

Yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ antaa siis ominaisarvot $\lambda_1 = -1 + i$ ja $\lambda_2 = -1 - i$. Näiden reaaliosa on negatiivinen. Lauseesta 6.2 seuraa siis, että kriittinen piste $(-2, 1)$ on asymptoottisesti epästabiili.

Ratkaisu 2. Merkitään $\mathbf{z} = (x, y)$ ja kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan ensin kriittiset pisteet. Nämä saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3y + 12 = 0, \\ 3x - 15 = 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan kriittinen piste $(x, y) = (5, 4)$. Määritetään seuraavaksi tämän laatu. Riittää tutkia homogeeniyhtälön kriittistä pistettä $(0, 0)$ (katso monisteen sivu 84). Nyt

$$\det(A) = -3 \neq 0,$$

joten $(5, 4)$ on siis Lauseen 6.2 nojalla ainoa kriittinen piste. Lasketaan seuraavaksi ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

Yhtälö $\det(A-\lambda I) = 0$ antaa siis ominaisarvot $\lambda_1 = -\sqrt{3}$ ja $\lambda_2 = \sqrt{3}$. Nämä ovat reaaliset ja erimerkkiset. Lauseesta 6.2 seuraa siis, että kriittinen piste on epästabiili satulapiste.

Ratkaisu 3. Huom. tehtävänanto on muuttunut! Tarkasteltava systeemi on

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - y, \\ \dot{y} = 3 + 6x^2 - y^2. \end{cases}$$

Kriittiset pisteet saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} 0 = 3x^2 - y \\ 0 = 3 + 6x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 0 = 3 + 2y - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ y = -1 \text{ tai } y = 3. \end{cases}$$

Reaaliset ratkaisut antavat kriittiset pisteet $(1, 3)$ ja $(-1, 3)$. Lasketaan derivaattamatriisi:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \\ \partial_x g(x, y) & \partial_y g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ 12x & -2y \end{bmatrix}.$$

Asetetaan $A_\pm = A(\pm 1, 3)$. Nyt $\det A_+ = -24 \neq 0$ ja $\det A_- = 24 \neq 0$. Lasketaan matriisin A_+ ominaisarvot:

$$\det(A_+ - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 12 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 24 = 0.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda = \pm\sqrt{24}$. Poincarén lauseesta (Lause 6.5 monisteessa) seuraa, että kriittinen piste $(1, 3)$ on epästabiili satulapiste.
Lasketaan matriisin A_- ominaisarvot:

$$\det(A_- - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 \\ -12 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 24 = 0.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda = -2(3 \pm \sqrt{3})$ ja täten erisuuret ja negatiiviset. Poincarén lauseesta seuraa, että kriittinen piste $(-1, 3)$ on asymptoottisesti stabiili.

Ratkaisu 4. Määritetään ensin systeemin kriittiset pisteet. Nämä saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2) = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-2) = 0. \end{cases}$$

Kriittiset pisteet ovat siis $(2,2)$ ja pisteet $(-1,a)$, jossa $a \in \mathbb{R}$. Lasketaan derivaattamatriisi:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-2 & x+1 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan pisteeseen $(2,2)$ liittyvät ominaisarvot:

$$\det\big(A(2,2) - \lambda I\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda = \pm 3$. Poincarén stabiilisuuslauseesta (Lause 6.5 monisteen sivulla 88) seuraa, että kriittinen piste $(2,2)$ on epästabili satulapiste.

Tarkastellaan seuraavaksi muotoa $(-1,a)$, $a \in \mathbb{R}$, olevia kriittisiä pisteitä. Nyt

$$\det A(-1,a) = \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Emme siis voi soveltaa Poincarén stabiilisuuslausetta (Lause 6.5 monisteen sivulla 88) näihin pisteisiin.

Lasketaan lopuksi systeemin radat. Nämä saadaan differentiaaliyhtälöstä

$$y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(y(x)-2)} = \frac{x-2}{y(x)-2}.$$

Tämä on separoituva yhtälö, joten

$$\begin{aligned} y'(y-2) = x-2 \;&\Leftrightarrow\; \Big(\int (y-2)\,dy\Big) \circ y = \int x - 2\,dx \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}y^2(x) - 2y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_0 \\ &\Leftrightarrow\; (y(x)-2)^2 = x^2 - 4x + C + 4 \end{aligned}$$

Jätetään yhtälö implisiittimuotoon ja kirjoitetaan se seuraavasti:

$$(y-2)^2 - (x-2)^2 = \pm s^2,$$

jossa $s \geq 0$. Tästä nähdään, että jos $s > 0$, niin ratkaisukäyrät muodostuvat hyperbeleistä ja näiden liittohyperbeleistä, joilla on keskipiste $(2,2)$. Jos $s = 0$, ovat ratkaisukäyrät näiden hyperbelien asymptootit.

Ratkaisu 5. a) Ensinnäkin pätee, että

$$(y')^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \pm\sqrt{1-y^2}.$$

Oikealla puolella on kaksi yhtälöä ja näiden ratkaisut toteuttavat alkuperäisen yhtälön. Ratkaistaan siis nämä.

Ratkaistaan ensin separoimalla yhtälö $y' = \sqrt{1-y^2}$. Triviaaliratkaisut ovat $y = \pm 1$. Edelleen

$$\begin{aligned}\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \;&\Leftrightarrow\; \Big(\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\Big) \circ y = x + C \\ &\Leftrightarrow\; \arcsin(y(x)) = x + C \\ &\Leftrightarrow\; y(x) = \sin(x + C).\end{aligned}$$

Kiinnitetään vakio C. Valitaan $C = \frac{3\pi}{4}$, jolloin alkuehto $y_+(\pi/4) = \sin(\pi) = 0$ on voimassa. Ollaan siis löydetty ratkaisu

$$y_+(x) := \sin\Big(x + \frac{3\pi}{4}\Big). \tag{1}$$

Yhtälö $y' = -\sqrt{1-y^2}$ voidaan ratkaista vastaavasti, jolloin saadaan ratkaisu

$$y_-(x) := -\sin\Big(x + \frac{3\pi}{4}\Big). \tag{2}$$

b) Riittää osoittaa, että ratkaisut (1) ja (2) ovat niitä vastaavien yhtälöiden ainoat ratkaisut joukossa B alkuarvolla $y(\pi/4) = 0$. Tehdään tämä ratkaisulle (1) (toinen tapaus on samanlainen).

Merkitään $f(x, y) = \sqrt{1-y^2}$. Funktiot f ja $\partial_y f = -y/\sqrt{1-y^2}$ ovat jatkuvia joukossa B. Lokaalista OY-lauseesta seuraa, että jokaista arvoa x_0 kohden, jolla $(x_0, 0) \in B \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, on avoin väli $I_{x_0} \ni x_0$, jolla ratkaisu alkuarvo-ongelmalle $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(x_0) = y_+(x_0)$, on yksikäsitteinen. Ratkaisua y_+ ei voida siis jatkaa missään joukon B pisteessä jonain toisena ratkaisuna. Ratkaisu y_+ on siis yksikäsitteinen joukossa B.

Ratkaisu 6. Olkoon $D =]-1, 1[\times \mathbb{R}$. Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

missä $f(x,y) = \frac{\sin y + 1}{x^2 - 1}$. Funktio f on jatkuva koko D:ssä. Sovelletaan globaalia OY-lausetta (Lause 4.6 monisteessa). Osoitetaan, että f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen joukoissa $[a,b] \times \mathbb{R}$, missä $[a,b] \subset]-1,1[$. Väliarvolauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\,\partial_y f(x,\xi)|\, |y_1 - y_2| \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos \xi}{x^2 - 1} \right| |y_1 - y_2| \\
&\leq \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \right) |y_1 - y_2|.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu y on siis globaalin yksikäsitteisyyslauseen nojalla määritelty koko välillä $]-1,1[$.