Diff.yht. II, harj. 5, 2.–4.12.2014, ratk. (Jouni Luukkainen)

Lukuteoriaa. Jos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, niin yhtälön $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ rationaaliset juuret ovat kokonaislukuja ja kertoimen c tekijöitä. Jos nimittäin $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$ ovat lukuja, joilla ei ole yhteisiä alkutekijöitä, ja $\lambda = p/q$ on juuri, jolloin $p^3 + ap^2q + bpq^2 + cq^3 = 0$, niin q on luvun $p^3 = -q(ap^2 + bpq + cq^2)$ ja p luvun $cq^3 = -p(p^2 + apq + bq^2)$ tekijä, joten $q = 1$ ja $p|c$.

Teht. 1. *Etsi matriisikeinolla (joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita) $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä systeemille*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ratk. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} (5-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 4) + 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = -\lambda(\lambda-5)^2 = 0 \iff \lambda \in \{0, 5\};$$

ominaisarvon $\lambda = 5$ *algebrallinen kertaluku* on 2.

Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\lambda = 0: \quad (A - 0I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_1 = -2u_3, u_2 = -(5/2)u_3$$
$$\iff \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$$
$$\lambda = 5: \quad (A - 5I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\iff u_1 = -2u_3, u_2 = 0 \iff \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Täten ominaisarvon $\lambda = 5$ *geometrinen kertaluku* on 1: vastaava ominaisavaruus on 1-ulotteinen.

Ominaisvektorien avulla perusjärjestelmään saadaan siis ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Määritetään ominaisarvoon $\lambda = 5$ liittyvät yleistetyt ominaisvektorit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(A - 5I)^2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 20 & -8 \\ -5 & 25 & -10 \\ 2 & -10 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\iff v_1 = 5v_2 - 2v_3 \iff \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5a + 2b \\ a \\ -b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Valitaan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\parallel \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Näin saadaan perusjärjestelmään kolmas ratkaisu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) = e^{5t}(\mathbf{v} + t(A - 5I)\mathbf{v}) &= e^{5t} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{5t} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = e^{5t} \begin{bmatrix} 5 - 4t \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä.

Teht. 2. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

käyttäen sopivaa suoraa yritettä.

Ratk. Ratkaistaan ensin homogeenisysteemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Etsitään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$ (ominaisarvot puhtaan imaginääriset, koska A on antisymmetrinen: $A^T = -A$).

Etsitään kompleksista ominaisarvoa $\lambda = i \in \mathbb{C}$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -iu_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - iu_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = iu_2 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Valinnalla $a = 1$ saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

josta saadaan reaalisista ratkaisuista

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

koostuva perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Homogeenisysteemin yleinen ratkaisu on siis $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Huomataan, että $\mathbf{f}$ ei ole homogeenisysteemin ratkaisu. Täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään siksi yritettä, joka on samaa muotoa kuin $\mathbf{f}$, eli siis vakiofunktioyritettä $\mathbf{x}(t) = [\,a \quad b\,]^T$ $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - 2 \\ a + 3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = -2. \end{cases}$$

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 3. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

käyttäen variointikeinoa. Huomaa, että sama A kuin edellisessä tehtävässä.

Ratk. Homogeenisella systeemillä $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ on perusmatriisi $X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,] = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, joka kullakin t on ortogonaalinen, koska sen sarakkeet ovat keskenään kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita, ja symmetrinen; tällöin $X(t)^{-1} = X(t)^T = X(t)$. Kirjoitetaan homogeenisysteemin yleinen ratkaisu muotoon $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$).

Täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään variointikeinoa ja kirjoitetaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$, jolloin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = AX(t)\mathbf{c} + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t)$ ja siis

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \\ &\iff \dot{\mathbf{c}}(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t \\ -\cos t \sin t + \sin t \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Longleftarrow \mathbf{c}(t) = \int \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin saadaan yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{bmatrix}.$$

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 4. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \tag{1}$$

käyttäen sopivaa suoraa yritettä.

Ohje. *Suoraviivainen lasku johtaa* 4×4*-kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.*

Ratk. Ratkaistaan ensin täydelleen homogeeninen systeemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned} (A - 3I)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0); \\ (A + I)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -2u_1 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0). \end{aligned}$$

Täten homogeenisen systeemin yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Huomataan, että $\mathbf{f}(t) = -\mathbf{e}_1 \cos t - \mathbf{e}_2 \sin t$ ei sisälly homogeenisen systeemin ratkaisuihin. Tehdään siksi (1):n yksittäisratkaisun löytämiseksi yrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ määritettävin kertoimin $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Yritteelle on

$$(1) \iff -\mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t = A\mathbf{a}\cos t + A\mathbf{b}\sin t - \mathbf{e}_1\cos t - \mathbf{e}_2 \sin t \iff -\mathbf{a} = A\mathbf{b} - \mathbf{e}_2 \quad \& \quad \mathbf{b} = A\mathbf{a} - \mathbf{e}_1.$$

Sijoittamalla jälkimmäinen yhtälö edelliseen saadaan

$$-\mathbf{a} = A^2\mathbf{a} - A\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \iff (A^2 + I)\mathbf{a} = A\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

jossa $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ ja siis $(A^2+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, jolloin

$$\mathbf{a} = (A^2+I)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a} - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix} - \mathbf{e}_1 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\sin t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 5. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\text{(1)} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

käyttäen variointikeinoa. Huomaa, että sama A kuin edellisessä tehtävässä. Toisaalta, mikä olisi tässä toimiva suoran yritteen muoto?

Ratk. Homogeenisysteemillä $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ on perusmatriisi $X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,] = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix}$. Kirjoitetaan homogeenisysteemin yleinen ratkaisu muotoon $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ $(\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2)$.

Täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään variointikeinoa ja kirjoitetaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$, jolloin (ks. teht. 3) merkitsemällä $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t))$ tulee vaatimus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \iff \begin{cases} e^{3t}\dot{c}_1(t) + e^{-t}\dot{c}_2(t) = 3e^{3t} \\ 2e^{3t}\dot{c}_1(t) - 2e^{-t}\dot{c}_2(t) = -2e^{3t} \end{cases} \iff \begin{cases} 4e^{3t}\dot{c}_1(t) = 4e^{3t} \\ 4e^{-t}\dot{c}_2(t) = 8e^{3t} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dot{c}_1(t) = 1 \\ \dot{c}_2(t) = 2e^{4t} \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} c_1(t) = t \\ c_2(t) = \frac{1}{2}e^{4t} \end{cases}.$$

Näin saadaan yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2}e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{3t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ 2te^{3t} - e^{3t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e^{3t}\begin{bmatrix} 2t+1 \\ 4t-2 \end{bmatrix}.$$

Lisäämällä tähän homogeenisysteemin ratkaisu $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1(t)$ löydetään seuraava yksinkertaisempi yksittäisratkaisu:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}e^{3t}\begin{bmatrix} 2t+1 \\ 4t-2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} t+1 \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Yleiseksi ratkaisuksi tulee $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{3t}\begin{bmatrix} t+1 \\ 2t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Suora yrite olisi $\mathbf{x}(t) = te^{3t}\mathbf{a} + e^{3t}\mathbf{b}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2)$.

Teht. 6. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\text{(1)} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

käyttäen sopivaa suoraa yritettä. Huomaa, että sama A kuin tehtävässä 1.

Ratk. Tehtävän 1 perusteella $\mathbf{f}$ ei ole vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu, joten tehdään samaa muotoa oleva yrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}\ \forall t \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$). Nyt

$$(1) \iff \mathbf{0} = A\mathbf{u} + \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 3 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = -1 - 2u_3 \\ u_2 = -1/2 - (5/2)u_3 \end{cases} \iff \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Valitaan $a = 0$, jolloin saadaan (1):n yleinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{bmatrix} 5 - 4t \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$