Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 4, syksy 2014
Ratkaisuehdotuksia (Vesa Piilola)

Tehtävä 1. Muodosta $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä homogeenisysteemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ratkaisu
Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$
$$\iff \lambda_1 = 3 \quad \text{tai} \quad \lambda_2 = -2.$$

Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \lambda = 3: \quad (A - 3I)\mathbf{u} \quad &= \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\iff \quad u_1 = 4u_2. \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ jollakin $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ensimmäinen ratkaisu on tällöin $\mathbf{x_1}(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda = -2: \quad (A + 2I)\mathbf{u} \quad &= \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\iff \quad u_1 = -u_2. \end{aligned}$$

Tällöin siis $\mathbf{u} = b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, joten toiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x_2}(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen on löydetty perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))$.

Tehtävä 2. Muodosta $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä homogeenisysteemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, kun

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ratkaisu.

Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)\big((1-\lambda)^2-4\big) \\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2+4(1+\lambda) \\ &= -\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3 \\ &= (\lambda+1)(-\lambda^2+2\lambda+3) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-3).\end{aligned}$$

Matriisilla A on siis kaksi ominaisarvoa $\lambda_1=-1$ ja $\lambda_2=3$, joista ensimmäisen algebrallinen kertaluku on kaksi. Lasketaan vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$.

$$\begin{aligned}\lambda=-1: \quad (A+I)\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad &= \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ &\iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \iff u_2=-u_3.\end{aligned}$$

Tällöin siis $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ joillain $a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Saatiin siis kaksi ominaisvektoria. Ratkaistaan vielä kolmas ominaisarvoa $\lambda=3$ vastaava ominaisvektori:

$$\begin{aligned}(A-3I)\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad &\iff \quad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ &\iff \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ &\iff \quad u_1=0, \quad u_2=u_3 \\ &\iff \quad \mathbf{u}=c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{jollain} \quad c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

Näin ollen ratkaisut $\mathbf{x}_1(t)=e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t)=e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_3(t)=e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ muodostavat systeemin perusjärjestelmän.

Tehtävä 3. Muodosta $\mathbb{R}$:ssä perusmatriisi homogeenisysteemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Anna ratkaisu reaalimuodossa.

Ratkaisu.
Ratkaistaan A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad &= \quad (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\iff \quad \lambda = 2 \pm i. \end{aligned}$$

Etsitään kompleksista ominasarvoa $\lambda = 2 + i \quad \in \mathbb{C}$ vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned} (A - (2+i)I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad &\iff \quad \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{u} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &\iff \quad u_1 = iu_2 \\ &\iff \quad \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Valinnalla $a = 1$ saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u} = e^{2t}e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \left(\cos t + i \sin t\right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

josta saadaan reaalisia ratkaisuita

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) = \Re x(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_2(t) = \Im x(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tällöin $\mathbf{X(t)} = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)] = e^{2t} \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ on systeemin perusmatriisi.

Tehtävä 4. Muodosta $\mathbb{R}$:ssä perusmatriisi homogeenisysteemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Anna ratkaisu reaaliasussa.
Ratkaisu. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+1).\end{aligned}$$

Tämän nollakohdista saadaan ominaisarvot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_{2,3} = \pm i$. Etsitään näitä vastaavat ominaisvektorit.

$$\begin{aligned}\lambda = 1: \quad (A-I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad &= \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad u_1 = a \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad u_2 = u_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Etsitään vielä kompleksista ominaisarvoa $\lambda = i$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit:

$$\lambda - i: \quad (A - iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{cases} (1-i)u_1 + u_3 = 0 \\ iu_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_3 = (-1+i)u_1 \\ u_2 = iu_3 = i(-1+i)u_1 = (-1-i)u_1. \end{cases}$$

Siis

$$\mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \\ -1+i \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Valitsemalla $a = 1$ saadaan kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u} = e^0 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \\ -1+i \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Tästä saadaan taas reaalisia ratkaisuita ottamalla reaali- ja imaginääriosat erikseen:

$$\mathbf{x}_2(t) = \Re\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \Im\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Reaaliseksi perusjärjestelmäksi voidaan siis valita

$$(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t)).$$

Tehtävä 5. Etsi seuraavalle homogeenisysteemille $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä matriisikeinolla, joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratkaisu.
Määritetään taas A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Huomataan, että matriisilla on yksi kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda = -2$. Lasketaan tätä vastaava ominaisvektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} (A + 2I)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \iff & \; u_2 = -u_1 \\ \iff & \; \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Täten A:n ominaisvektoreista ei voida valita kantaa $\mathbb{R}^2$:lle. Siis perusjärjestelmää ei saada suoraan. Valinnalla $a = 1$ elil $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ tulee kuitenkin yksi ratkaisu $\mathbf{x_1}(t) = e^{-2t}\mathbf{u} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ etsittävään perusjärjestelmään.

Perusjärjestelmän toisen ratkaisun löytämiseksi valitaan vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, joka ei ole A:n ominaisvektori eli jolle $(A + 2I)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Etsitään ratkaisu $\mathbf{x_2}$ alkuehdolla $\mathbf{x_2}(0) = \mathbf{v}$ muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{x_2}(t) = e^{tA}\mathbf{v} = e^{-2t}e^{t(A+2I)}\mathbf{v} &= e^{-2t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n (A+2I)^n \right) \mathbf{v} \\ &= e^{-2t} \left(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v} + \frac{1}{2} t^2 (A+2I)^2 \mathbf{v} + \dots \right). \end{aligned}$$

Sarjan katkeamiseksi vaaditaan $(A + 2I)^2\mathbf{v} = 0$ eli että $\mathbf{v}$ on A:n ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvä yleistetty ominaisvektori. Nyt itseasiassa $(A + 2I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, jolloin voidaan valita $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T \nparallel \mathbf{u} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$. Näin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}\left(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v}\right) &= e^{-2t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\\
&= e^{-2t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\\
&= e^{-2t}\begin{bmatrix}1+t\\-t\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehtävä 6.
Etsi matriisikeinolla $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä systeemille

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\2 & 1-\lambda & -1\\0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\-1 & 1-\lambda\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) - 2(2-\lambda)\\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)\\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Tällä on juuret $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$, joista jälkimmäisen algebrallinen kertaluku on kaksi. Lasketaan näitä vastaavat ominaisvektorit.

$$\lambda = -1: \quad (A+I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_1 = -\frac{3}{2}u_3 \quad \text{ja} \quad u_2 = 2u_3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_1 = 0 \quad \text{ja} \quad u_2 = -u_3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen löydettiin ratkaisut

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

etsittävään perusjärjestelmään. Nämä vektorit eivät kuitenkaan muodosta $\mathbb{R}^3$:n kantaa, joten etsitään vielä ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvät yleistetyt ominaisvektorit ratkaisemalla yhtälö $(A - 2I)^2\mathbf{u} = 0$.

Sievennetään kerroinmatriisia:

$$
\begin{aligned}
(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Täten

$$
\begin{aligned}
(A-2I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad u_1 = u_2 + u_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Valitaan nyt esimerkiksi $s_1 = 1$ ja $s_2 = 0$, jolloin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_3(t) &= e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \\
&= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen lopulliseksi perusjärjestelmäksi saadaan:

$$
\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{bmatrix}.
$$