Diff.yht. II, harj. 3, 18.–20.11.2014, ratk. (Jouni Luukkainen)

Teht. 1. *Olkoon funktio* $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ *parin AAT:n*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+y)(x^2+y^2-1) \\ (t-x)(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}(0) = (1/2, 1/2),$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita systeemien Poistumislauseen (= lauseen 4.7 analogia) avulla, että funktio $\mathbf{z}$ *on hengissä koko* $\mathbb{R}$*:ssä.*

Ohje. *Triviaaliratkaisut. Voiko ratkaisulle päteä* $\|\mathbf{z}(t)\| \geq 1$*? Syy. Kuva txy-koordinaatistossa voi auttaa.*

Ratk. On siis merkitty $\|(u,v)\| = \sqrt{u^2+v^2}$ $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon $S^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ yksikköympyrä ja $B^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| < 1\}$ avoin yksikkökiekko. Havaitaan, että kaikilla $\mathbf{u} \in S^1$ vakiofunktio $\mathbf{z}_\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on systeemin ratkaisu, siis triviaaliratkaisu (muita triviaaliratkaisuita ei olekaan). Havaitaan myös, että AAT:n alkuehdon pisteelle on $(1/2, 1/2) \in B^2$, sillä $\|(1/2,1/2)\| = \sqrt{2}/2 < 1$.

Systeemin määrittelevä funktio $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t,x,y) = \big((t+y)(x^2+y^2-1), (t-x)(x^2+y^2-1)\big)$, on jatkuva. Jälkimmäisten osittaisderivaattojen muodostama matriisifunktio $(\partial_j f_i)_{i=1,2;j=2,3} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$\begin{bmatrix} \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \end{bmatrix} (t,x,y) = \begin{bmatrix} 2x(t+y) & (x^2+y^2-1) + 2y(t+y) \\ -(x^2+y^2-1) + 2x(t-x) & 2y(t-x) \end{bmatrix},$$

on myös jatkuva. Täten systeemien lokaalin OY-lauseen ja poistumislauseen oletukset pätevät, ja AAT:llä on todellakin olemassa yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu $\mathbf{z} \colon I \to \mathbb{R}^2$ avoimella välillä $I =]a, b[$ joillain $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Poistumislauseen nojalla $\|(t, \mathbf{z}(t))\| = \sqrt{t^2 + \|\mathbf{z}(t)\|^2} \to \infty$, kun $t \to a+$ tai kun $t \to b-$. Osoitetaan, että $\mathbf{z}$ on rajoitettu funktio. Silloin $a = -\infty$ ja $b = \infty$ eli siis $I = \mathbb{R}$.

Nyt, koska $\mathbf{z}(0) \in B^2$, niin lokaalin OY-lauseen nojalla pätee, että $(t, \mathbf{z}(t)) \neq (s, \mathbf{z}_\mathbf{u}(s))$, kun $t \in I$, $s \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{u} \in S^1$, eli $\mathbf{z}(t) \neq \mathbf{u}$, kun $t \in I$ ja $\mathbf{u} \in S^1$, eli $\mathbf{z}I \cap S^1 = \emptyset$. Täten, koska joukko $\mathbf{z}I$ on yhtenäinen janan jatkuvana kuvana, niin $\mathbf{z}I \subset B^2$. Siis $\|\mathbf{z}(t)\| < 1$ $\forall t \in I$.

Vaihtoehtoisesti $\mathbb{R}^3$:ssa: OY-lauseesta nähdään, että maksimaaliratkaisun kuvaajan $\Gamma = \{(t, \mathbf{z}(t)) \mid t \in I\}$ ja avoimen lieriökappaleen $L = \mathbb{R} \times B^2$ reunan eli lieriöpinnan $\partial L = \mathbb{R} \times S^1$ leikkaus on tyhjä, sillä ∂L on yhdiste triviaaliratkaisujen kuvaajasuorista $\Gamma_\mathbf{u} = \{(t, \mathbf{z}_\mathbf{u}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ($\mathbf{u} \in S^1$) ja $(0, \mathbf{z}(0)) \in L$. Koska Γ on yhtenäinen joukko, tästä seuraa, että $\Gamma \subset L$. Silloin poistumislauseen tähden täytyy olla $a = -\infty$ ja $b = \infty$.

Teht. 2. *Harjoituksen* 1 *tehtävän* 1 *yleisessä ratkaisussa on kolme parametria. Osoita sitovasti, että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.*

Ohje. *Lause* 5.4*, tai jos haluat palauttaa systeemiksi, lause* 5.3 *tai* 5.5 *tai yksinkertaisimmin ehkä* 5.9*.*

Ratk., I tapa. Kyseessä on vakiokertoiminen 3. kl. HY $y^{(3)} + 4y'' + y' - 6y = 0$. Sille saatiin yleinen ratkaisu $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$). Nähtiin myös, että ratkaisukolmikon $(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) = (e^x, e^{-2x}, e^{-3x})$ Wronskin matriisin

$$Y(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$$

determinantille eli siis Wronskin determinantille $W(y_1, y_2, y_3) = \det Y(y_1, y_2, y_3)$ on $W(y_1, y_2, y_3)(x) = -12e^{-4x} \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Täten jono (y_1, y_2, y_3) on vapaa (jos se olisi sidottu, myös sarakevektoreiden jono olisi sidottu ja determinantti aina nolla). Pitää vielä osoittaa, että (y_1, y_2, y_3) virittää ratkaisuavaruuden. Olkoon täten $y_0 \colon I \to \mathbb{R}$ mielivaltainen ratkaisu. Valitaan $x_0 \in I$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset kertoimet $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, joilla

$$[\, y(x_0) \quad y'(x_0) \quad y''(x_0) \,]^T = Y(y_1, y_2, y_3)(x_0) \, [\, C_1 \quad C_2 \quad C_3 \,]^T = [\, y_0(x_0) \quad y_0'(x_0) \quad y_0''(x_0) \,]^T.$$

Lauseen 5.4 nojalla näillä kertoimilla on $y_0(x) = y(x)$ $\forall x \in I$. Siis yleinen ratkaisu sisälsi kaikki ratkaisut.

Täten (y_1, y_2, y_3) on ratkaisuavaruuden kanta eli HY:n perusjärjestelmä.

II tapa: Systeemiin palautuksen kautta. Sijoituksella $z_1 = y$, $z_2 = y'$ ja $z_3 = y''$ DY palautuu vektorifunktion $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ vakiokertoimiseksi 1. kl. HY:ksi $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$, jossa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sijoitusoperaattori $y \mapsto \mathbf{z}$ vastaavien ratkaisuavaruuksien välillä on lineaarinen isomorfismi käänteisoperaattorina $\mathbf{z} \mapsto z_1$.

Sijoituksessa ratkaisukolmikko (y_1, y_2, y_3) muuntuu ratkaisukolmikoksi $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$, jossa $\mathbf{z}_k = (y_k, y_k', y_k'')$ kaikilla $k = 1, 2, 3$. Nyt $W(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)(x) = W(y_1, y_1, y_3)(x) = -12e^{-4x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Täten lauseen 5.9 nojalla $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä. Tällöin (y_1, y_2, y_3) on skalaarisen DY:n perusjärjestelmä. Sen lineaarikombinaatioina saadaan kaikki ratkaisut.

Teht. 3. *Kirjoita seuraava 2×2-homogeenisysteemi perinteellisesti auki ja ratkaise se:*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) \tag{1}$$

Montako vapaasti valittavaa parametria? Anna systeemille jokin perusjärjestelmä.

Ratk. Kerroinmatriisi on jatkuva, joten vapaasti valittavia parameteja on oltava kaksi.

I tapa. Merkitään $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$. Silloin

$$(1) \iff \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 2tz_1(t) + 3t^2 z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = 2tz_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} z_2(t) = C_2 e^{\int 2t\,dt} = C_2 e^{t^2} \\ \dot{z}_1(t) - 2tz_1(t) = 3C_2 t^2 e^{t^2} \end{cases}.$$

Tässä

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) - 2tz_1(t) = 3C_2 t^2 e^{t^2} &\iff e^{-t^2}\dot{z}_1(t) - 2te^{-t^2} z_1(t) = 3C_2 t^2 \iff \frac{d}{dt}(e^{-t^2} z_1(t)) = 3C_2 t^2 \\ &\iff e^{-t^2} z_1(t) = C_1 + C_2 t^3 \iff z_1(t) = C_1 e^{t^2} + C_2 t^3 e^{t^2}. \end{aligned}$$

Täten (1):n yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t^2} + C_2 t^3 e^{t^2} \\ C_2 e^{t^2} \end{bmatrix} = C_1 e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{z}_1(t) + C_2 \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

kun $\mathbf{z}_1(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{z}_2(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

II tapa. Etsitään suoraan perusjärjestelmä $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$. Ensin valitaan yhtälölle $\dot{z}_2(t) = 2tz_2(t)$ ratkaisut $z_2(t) = 0$ ja $z_2(t) = e^{t^2}$ ja sitten valitaan saaduille yhtälöille $\dot{z}_1(t) = 2tz_1(t)$ ja $\dot{z}_1(t) = 2tz_1(t) + 3t^2 e^{t^2}$ vastaavasti ratkaisut $z_1(t) = e^{t^2}$ ja $z_1(t) = t^3 e^{t^2}$; tällöin saadaan ratkaisut $\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{z}_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{bmatrix}$, jotka muodostavat vapaan parin $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ ja siis perusjärjestelmän, sillä niiden determinantille pätee $\det(\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t)) = \begin{vmatrix} e^{t^2} & t^3 e^{t^2} \\ 0 & e^{t^2} \end{vmatrix} = e^{2t^2} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Yleinen ratkaisu on nyt $\mathbf{z} = C_1 \mathbf{z}_1 + C_2 \mathbf{z}_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 4. *Osoita, että funktiopari $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \left([1 \quad e^t]^T, [e^{-t} \quad 2]^T \right)$ on lineaarisen 2×2-homogeenisysteemin*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Ratk. Olkoon $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva. Koska

$$A(t)\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-e^{-t})e^t \\ 2e^t \cdot 1 + (-1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

niin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Samoin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, sillä

$$A(t)\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi pari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, sillä sen Wronskin determinantille on

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^t & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - e^t e^{-t} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Täten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 5. *Kirjoita seuraava lineaarinen 2×2-systeemi perinteellisesti auki ja ratkaise se sitten eliminointikeinolla:*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + 4\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ratk. Merkitään $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$. Tällöin

$$(2) \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + 4 & (3) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) + 4t & (4) \end{cases}.$$

Nyt (3) $\iff y(t) = \dot{x}(t) - x(t) - 4$, jolloin $\dot{y}(t) = \ddot{x}(t) - \dot{x}(t)$ ja siis

$$(4) \implies \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 3x(t) - (\dot{x}(t) - x(t) - 4) + 4t \iff \ddot{x}(t) - 4x(t) = 4 + 4t.$$

Saatin siis 2. kl. DY:stä ja 0. kl. DY:stä koostuva systeemi

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4x(t) = 4 + 4t & (3') \\ y(t) = \dot{x}(t) - x(t) - 4 & (4'). \end{cases}$$

Osoitetaan, että uusi systeemi on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa. Nähtiin jo, että (3)&(4) $\implies$ (3′)&(4′). Oletetaan siis (3′)&(4′). Nyt (4′) $\implies$ (3). Tarkastetaan (4):

$$\dot{y} \overset{(4')}{=} \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) \overset{(3'),(3)}{=} \big(4x(t) + 4 + 4t\big) - \big(x(t) + y(t) + 4\big) = 3x(t) - y(t) + 4t.$$

Ratkaistaan nyt systeemi (3′)&(4′).

Vakiokertoimisen 2. kl. HY:n $\ddot{x}(t) - 4x(t) = 0$ KY:n $r^2 - 4 = 0$ juuret ovat $r = \pm 2$ ja siis perusjärjestelmä $(x_1(t), x_2(t)) = (e^{2t}, e^{-2t})$. Epähomogeenisuusfunktion termit 4 ja $4t$ eivät ole HY:n ratkaisuita, joten yritteen $x(t) = a + bt$ $(a, b \in \mathbb{R})$ pitäisi onnistua; tälle (3′) $\iff 0 - 4(a + bt) = 4(1+t) \iff a = b = -1$. Täten (3′) $\iff x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 1 - t$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$. Nyt

$$y(t) = \dot{x}(t) - x(t) - 4 = \big(2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t} - 1\big) - \big(C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 1 - t\big) - 4 = C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - 4 + t.$$

Siis

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 1 - t \\ C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - 4 + t \end{bmatrix} = C_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teht. 6. *Etsi matriisikeinolla seuraavalle 3×3-homogeenisysteemille perusjärjestelmä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratk. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $(3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ (jossa lisättiin kolmas rivi ensimmäiseen riviin, vähennettiin ensimmäinen sarake kolmannesta sarakkeesta, kehitettiin ensimmäisen rivin mukaan, vähennettiin ensimmäinen rivi toisesta rivistä ja lisättiin toinen sarake ensimmäiseen sarakkeeseen) juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja λ vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda = 3$: $(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 2u_3 \end{cases} \iff$ $\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$: $(A - I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 4u_3 \end{cases} \iff$ $\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja vähennettiin kolmas yhtälö toisesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_3 = u_2 =$ $-u_1 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa ensin lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön ja sitten jaettiin ensimmäinen ja toinen yhtälö 5:llä sekä vähennettiin nämä yhtälöt kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_3(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.