Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 2, ratkaisuehdotuksia, 7.11.2014
Valter Pohjola

Ratkaisu 1. Olkoon $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja K sellainen suorakaide, että $(x, -1) \in K$. Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen K:ssa, Lipschitz-vakiolla M.
Nyt $(x, -1+\varepsilon) \in K$ tai $(x, -1-\varepsilon) \in K$, kun $\varepsilon > 0$ on pieni. Käsitellään ensimmäinen tapaus (toinen tapaus hoituu samalla tavalla). Lipschitz-ehdon nojalla

$$|f(x, -1) - f(x, -1+\varepsilon)| \leq M|-1+1-\varepsilon|.$$

Koska $f(x, y) = x(y+1)^{1/3}$, saadaan, että

$$|x\varepsilon^{1/3}| \leq M\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{-2/3} \leq \frac{M}{|x|}.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä jälkimmäisen epäyhtälön vasenpuoli lähestyy ääretöntä, kun $\varepsilon \to 0$, vaikka oikea puoli on rajoitettu.

Ratkaisu 2. Merkitään

$$f(t, \theta) = c_1(Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta))^2.$$

Funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Alkuarvo-ongelmalla

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= f(t, \theta(t)), \\ \theta(t_0) &= \theta_0, \end{aligned}$$

on Lauseen 4.6 nojalla maksimaalinen ratkaisu $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mikäli f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan θ suhteen suorakaiteissa $[a, b] \times \mathbb{R}$, kun $-\infty < a < b < \infty$.
Olkoon $(t, \theta_1), (t, \theta_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Väliarvolauseen nojalla

$$|f(t, \theta_1) - f(t, \theta_2)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\,\partial_\theta f(t, \xi)|\,|\theta_1 - \theta_2|. \tag{1}$$

Laskemalla derivaatta nähdään toisaalta, että

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\,\partial_\theta f(t, \xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |2c_1(Kc_1^{-2} + c\cos(\xi - \delta))c(-\sin(\xi - \delta))| \\ &\leq 2|c_1|\big(|Kc_1^{-2}| + |c|\big)|c| =: M < \infty. \end{aligned}$$

Epäyhtälöstä (1) nähdään siis, että Lipschitz-ehto on voimassa vakiolla M.

Ratkaisu 3. Merkitään

$$f(x,y) = e^x \sin x \cos y.$$

Funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Alkuarvo-ongelmalla

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

on Lauseen 4.6 nojalla maksimaalinen ratkaisu $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mikäli f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen suorakaiteissa $[a,b] \times \mathbb{R}$, kun $-\infty < a < b < \infty$.
Olkoon $(x,y_1), (x,y_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Väliarvolauseen nojalla

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\,\partial_y f(x,\xi)|\,|y_1 - y_2|. \tag{2}$$

Laskemalla derivaatta nähdään toisaalta, että

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\,\partial_y f(x,\xi)| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |-e^x \sin x \sin \xi| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^x|\,|\sin x|\,|\sin \xi| \leq e^b =: M_b < \infty.$$

Epäyhtälöstä (2) nähdään siis, että Lipschitz-ehto on voimassa vakiolla M_b.

Ratkaisu 4. Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$\begin{cases} \dot\theta(t) = f(t, \theta(t)), \\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \tag{3}$$

Lokaalin OY-lauseen ja poistumislauseen oletukset pätevät koko $\mathbb{R}^2$:ssa, koska f ja $\partial_2 f$ ovat jatkuvia $\mathbb{R}^2$:ssa. Täten alkuarvo-ongelmalla (3) on ratkaisu θ maksimaalisella välillä I. Huomataan, että f on rajoitettu, sillä

$$M_2 = \sup_{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2} |f(t,\theta)| \leq |c_1|(Kc_1^{-2} + |c|)^2 < \infty.$$

Tästä seuraa, että $\sup_{t \in I} |\dot\theta(t)| \leq M_2$. Siis, kun $t \in I$, niin

$$|\theta(t) - \theta_0| = \left| \int_0^t \dot\theta(\tau)\, d\tau \right| \leq \left| \int_0^t |\dot\theta(\tau)|\, d\tau \right| \leq \left| \int_0^t M_2\, d\tau \right| = M_2|t|.$$

Saamme siis rajat $\theta_0 - M_2|t| \leq \theta(t) \leq \theta_0 + M_2|t|$ kaikilla $t \in I$.
Olkoon $\beta > 0$. Suorakulmio $K = [0,\beta] \times [\theta_0 - M_2\beta, \theta_0 + M_2\beta]$ on kompakti. Poistumislauseesta seuraa, että ratkaisukäyrä $(t, \theta(t))$ ulottuu välillä $I \cap]0, \infty[$ joukon K ulkopuolelle. On siis olemassa sellainen $t \in I$, jolla $t > 0$ ja $(t, \theta(t)) \notin K$. Jos $t \leq \beta$, niin $\theta(t) \in [\theta_0 - M_2\beta, \theta_0 + M_2\beta]$, joten $(t, \theta(t)) \in K$. Tämä on kuitenkin ristiriita, joten $t > \beta$.
Täten $\sup I = \infty$.
Samalla tavalla osoitetaan, että $\inf I = -\infty$. Siis $I = \mathbb{R}$.

Ratkaisu 5. (a) Merkitään $z_1 = y$, $z_2 = y'$ ja $z_3 = y''$. Tällöin

$$y^{(3)} + x^3 \cos(y'') + \cos(x)y = z_3' + x^3 \cos(z_3) + \cos(x)z_1.$$

Nyt alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa systeeminä

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= z_3, \\ z_3' &= \sin(x) - x^3 \cos(z_3) - \cos(x)z_1. \end{aligned}$$

Kääntäen, jos (z_1, z_2, z_3) on systeemin ratkaisu välillä I, niin $y = z_1$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu välillä I.

(b) Ensimmäisen kertaluvun systeemin normaalimuoto on määritelty luentomonisteen sivulla 60. Asetetaan $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = \dot{x}_1$ ja $z_4 = \dot{x}_2$, jolloin

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= m\dot{z}_3 + 2kz_1 - kz_2, \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 &= m\dot{z}_4 + 2kz_2 - kz_1. \end{aligned}$$

Saadaan siis systeemi

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3, \\ \dot{z}_2 &= z_4, \\ \dot{z}_3 &= m^{-1}(kz_2 - 2kz_1), \\ \dot{z}_4 &= m^{-1}(kz_1 - 2kz_2). \end{aligned}$$

Ratkaisu 6. (a) Merkitään $z_1 = x$ ja $z_2 = y$, jolloin

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= f(t, z_1, z_2, \dot{z}_1), \\ \dot{z}_2 &= g(t, z_1, z_2). \end{aligned}$$

Asetetaan $z_3 = \dot{x} = \dot{z}_1$, jolloin saadaan ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen systeemi (katso moniste sivu 60)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3, \\ \dot{z}_2 &= g(t, z_1, z_2), \\ \dot{z}_3 &= f(t, z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

(b) Merkitään jälleen $z_1 = x$, $z_2 = y$ ja $z_3 = \dot{z}_1$. Nyt pätee, että

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3, \\ \dot{z}_2 &= g(t, z_1, z_2), \\ \dot{z}_3 &= f(t, z_1, z_2, z_3, \dot{z}_2) = f(t, z_1, z_2, z_3, g(t, z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Tämä on siis ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen systeemi.