**Differentiaaliyhtälöt II**
Harjoitus 1, syksy 2014
Ratkaisuehdotuksia (Vesa Piilola)

**Tehtävä 1.** Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2.kl. teoriaa seuraava lineaarinen 3.kl. homogeeniyhtälö:

$$y^{(3)} + 4y'' + y' - 6y = 0.$$

**Ratkaisu**

Yhtälö on vakiokertoiminen. Kuten 2. kertaluvun tapauksessa ratkaisua voi lähteä hakemaan yritteellä $y(x) = e^{rx}(r \in \mathbb{C})$. Vastaavaan tyyliin kuin 2. kertaluvulla tämä johtaa karakteristiseen yhtälöön

$$r^3 + 4r^2 + r - 6 = 0.$$

Nopeasti kokeilemalla huomataan, että tällä on juuri $r_1 = 1$. Polynomin muut tekijät voidaan ratkaista esimerkiksi jakokulmasta, jolloin saamme

$$r^3 + 4r^2 + r - 6 = (r - 1)(r^2 + 5r + 6).$$

Jälkimmäisellä toisen asteen polynomilla puolestaan on juuret $r_2 = -2$ ja $r_3 = -3$.

Olemme siis löytäneet HY:lle kolme ratkaisua $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-2x}$ ja $y_3(x) = e^{-3x}$. Tämän voi vielä vaikka todeta sijoittamalla nämä ratkaisut alkuperäiseen yhtälöön.

Nyt yleinen ratkaisu saataisiin näiden lineaarikombinaatiosta

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

*Riippumattomuudesta*

Saadut kolme ratkaisua ovat tosiaan lineaarisesti riippumattomia eli kysessä on perusjärjestelmä. Tämän voi tarkastaa vielä tutkimalla kolmeulotteista Wronskin determinanttia, jossa esiintyy myös ratkaisuiden toiset derivaatat:

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2, y_3)(x) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} & e^{-3x} \\ e^x & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} \\
&= e^x \begin{vmatrix} -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} - e^x \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} + e^x \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\
&= -12e^{-4x} \quad \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

**Tehtävä 2.** Olkoot $y_1 : I \to \mathbb{R}$ ja $y_2 : I \to \mathbb{R}$ derivoituvia funktioita välillä $I$, ja pätekööt $W(y_1, y_2)(x) = 0$ ja $y_1(x) \neq 0 \neq y_2(x)$ kaikilla $x \in I$. Osoita, että tällöin funktiot $y_1$ ja $y_2$ ovat lineaarisesti riippuvia.

**Ratkaisu.**

**Tapa I.**

Yhtälöstä

$$0 = W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

saadaan jakamalla tulolla $y_1(x)y_2(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ muodostettua uusi yhtälö:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{y_2'(x)}{y_2(x)} - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \\
\iff \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} &= \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}
\end{aligned}
$$

Ratkaisemalla tämän saamme:

$$
\begin{aligned}
\ln(|y_1(x)|) &= \ln(|y_2(x)|) + c_0 \\
\iff y_1(x) &= cy_2(x) \quad (c = \pm e^{c_0} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).
\end{aligned}
$$

**Tapa II.**

Merkitään $y(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, joka on nyt hyvin määritelty kaikilla $x \in I$. Nyt

$$y' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2} = \frac{-W(y_1, y_2)}{y_2^2} = 0.$$

Tällöin

$$\frac{y_1}{y_2} = c \Longleftrightarrow y_1 = cy_2 \quad \text{jollakin } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Huomautus*
Mikäli olettaisimme $y_1$:n ja $y_2$:n jatkuvasti derivoituviksi, niin $y_1$ ja $y_2$ toteuttaisivat 1. kertaluvun HY:n $y' + p(x)y = 0$ eräällä yksikäsitteisellä jatkuvalla funktiolla $p$ (nimittäin funktiolla $p = -\frac{y_2'}{y_2} = -\frac{y_1'}{y_1}$. Tällöin tämän HY:n ratkaisuavaruus on 1-uloitteinen, koska kyseessä on ensimmäisen asteen DY, joten tällöin $(y_1, y_2)$ on sidottu.

**Tehtävä 3.** Onko funktio $f(x,y) = y^3 \cos x$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $y$ suhteen, kun

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad I = [0,1] \text{ ja } J = [0,1],\\
&\text{(b)} \quad I = \mathbb{R} \text{ ja } J = [0,1],\\
&\text{(c)} \quad I = [0,1] \text{ ja } J = [0,\infty[?
\end{aligned}$$

**Ratkaisu.**

On siis tutkittava, onko olemassa vakiota $M \in [0,\infty[$, jolla $f$ on $M$-Lipschitz suorakaiteessa $I \times J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \in J\}$ jälkimmäisen muuttujan suhteen eli jolle pätee

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I \text{ ja } y_1, y_2 \in J.$$

Palautetaan mieleen Analyysin kurssiltä väliarvolause: Jos $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a,b[$, niin $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a)$ jollain $\xi \in ]a,b[$.

Tällöin, jos on olemassa vakio $M \geq 0$, jolla $|\varphi'(t)| \leq M \ \forall t \in ]a,b[$ niin $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq M|s-t| \ \forall s,t \in ]a,b[$ eli $\varphi$ on $M$-Lipschitz.

Palataan nyt tutkimaan tehtävänantomme funktiota $f(x,y) = y^3 \cos x$. Huomataan, että se on jatkuva ja derivoituva koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Voidaan siis soveltaa väliarvolausetta (itseasiassa $y$:n funktioon $g(y) = y^3$, jolle $g'(y) = 3y^2$) tehtävänannon alueissa.

**(a)**

Olkoon $x, y_1, y_2 \in [0,1]$. Nyt jollain $\xi \in [0,1]$ pätee

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |y_1^3 \cos x - y_2^3 \cos x| \\ &= |\cos x||y_1^3 - y_2^3| \\ &\leq |y_1^3 - y_2^3| \\ &= |3\xi^2||y_1 - y_2| \\ &\leq 3|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Siis $f$ on 3-Lipschitz.

**(b)**
Koska kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee arvio $|\cos x| \leq 1$ niin (a)-kohdan päättely pätee vastaavasti alueessa $\mathbb{R} \times [0,1]$. Siis $f$ on tässäkin joukossa 3-Lipschitz.

**(c)**

Joukossa $[0,1] \times [0,\infty[$ funktio $f$ ei ole tasaisesti Lipschitz, sillä $y$:n suhteen derivaatta ei ole rajoitettu.

Vielä hieman tarkemmin perusteltuna:

Olkoon $M \geq 0$. Tutkitaan funktiota joukon rajoitetussa osajoukossa $D = [0,1] \times [M-1, M]$. Valitaan $x, y_1, y_2 \in D$; tällöin

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |\cos x||y_1^3 - y_2^3| \\ &\geq \cos 1 |y_1^3 - y_2^3| \\ &= \cos 1 \cdot 3\xi^2 |y_1 - y_2| \quad \text{jollain} \quad \xi \in [M-1, M]. \end{aligned}$$

Nyt, kun $M$ kasvaa rajatta, niin myös $3\xi^2$ kasvaa rajatta. Tällöin emme voi löytää mitään vakiota, jolla Lipschitz-ehto toteutuisi.

**Tehtävä 4.**
Missä $\mathbb{R}^2$:n mahdollisimman suurissa alueissa DY

$$y' = f(x,y) = x\sqrt[3]{y+1}$$

toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot?

**Ratkaisu.** Funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\sqrt[3]{y+1}$ on jatkuva ja osittaisderivaatta $y$:n suhteen

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x\frac{1}{3}(y+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(y+1)^2}}$$

on määritelty avoimissa puolitasoissa

$$D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\} \quad \text{ja} \quad D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\}.$$

Lemman 4.2 nojalla alueissa $D_\pm$ funktio $f$ toteuttaa lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan $y$ suhteen, joten näissä alueissa DY toteuttaa lokaalin OY-lauseen ehdot.

Alueiden $D_\pm$ maksimaalisuuteen palataan laskuharjoituksissa 2.

**Tehtävä 5.**
**(a)** Määrää neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle

$$y' = -y, \quad y(0) = 2.$$

**(b)** Ratkaise AAT eksaktisti ja vertaa Picardin approksimaatteihin.

**Ratkaisu.**
Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin AAT:n $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$, Picardin approksimaatit saadaan rekursiivisesti kaavoista $y_0(x) = y_0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$.

**(a)**
Lasketaan Picardin approksimaatit:

$$y_0(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ja $y_{n+1} = 2 - \int_0^x y_n(t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$, joten

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 2 - \int_0^x 2dt = 2 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
y_2(x) &= 2 - \int_0^x (2-2t)dt = 2 - 2x + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
y_3(x) &= 2 - \int_0^x (2 - 2t + t^2)dt = 2 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**(b)**

Ratkaistaan DY eksaktisti. Kyseessä on separoituva DY, jolla on triviaaliratkaisu $y = 0$. Tämä ei kuitenkaan ole AAT:mme ratkaisu, joten separoidaan:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{-y} &= \int 1dx \\ \iff -\ln|y| &= x + C_0 \iff y = Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Alkuarvosta $y(0) = 2$ saadaan kiinnitettyä $C = 2$. Siis AAT:n ratkaisu on

$$y(x) = 2e^{-x}.$$

Lisäkysymyksestä:

Muistellaan Analyysi II:sta funktion $e^x$ Taylorin sarja $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tarkalle ratkaisulle saadaan nyt Taylorin sarja

$$\begin{aligned} y(x) = 2e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} &= 2(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots) \\ &= 2 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Huomataan siis, että (a)-kohdan Picardin approksimaatit ovat tarkan ratkaisun Taylorin polynomeja: $y_n(x) = T_n(y; 0)(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}$.

**Tehtävä 6.**
**(a)** Määrää neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle

$$y' = x^{\frac{5}{3}}y + 1, \quad y(0) = 1.$$

**(b)** Ratkaise AAT myös eksaktisti.

**Ratkaisu.**
**(a)**

Picardin approksimaatiossa nyt $x_0 = 0, y_0 = 1$ ja $f(x,y) = 1 + x^{\frac{5}{3}}y$. Saamme

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t^{\frac{5}{3}} \cdot 1\right) dt = 1 + x + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t^{\frac{5}{3}}(1 + t + \frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}})\right) dt \\
&= 1 + \int_0^x 1 + t^{\frac{5}{3}} + t^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{8}t^{\frac{13}{3}} dt \\
&= 1 + x + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{9}{8 \cdot 16}x^{\frac{16}{3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t^{\frac{5}{3}}(1 + t + \frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + \frac{9}{8 \cdot 16}t^{\frac{16}{3}})dt \\
&= 1 + \int_0^x 1 + +t^{\frac{5}{3}} + t^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{8}t^{\frac{13}{3}} + \frac{3}{11}t^{\frac{16}{3}} + \frac{9}{8 \cdot 16}t^{\frac{21}{3}} dt \\
&= 1 + x + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{9}{8 \cdot 16}x^{\frac{16}{3}} + \frac{3 \cdot 3}{11 \cdot 19}x^{\frac{19}{3}} + \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^{\frac{24}{3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**(b)**

Ratkaistaan AAT nyt eksaktisti. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY, jonka standardimuoto on

$$y' - x^{\frac{5}{3}}y = 1.$$

Merkitään $p(x) = -x^{\frac{5}{3}}$ ja $g(x) = 1$.
Standardimuodolla on integroiva tekijä

$$\mu(x) = e^{\int -x^{\frac{5}{3}}dx} = e^{-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}}.$$

Nyt voidaan soveltaa jo tuttua lineaarisen DY:n ratkaisumenetelmää:

$$\begin{aligned}
y'(x) + p(x)y(x) &= 1 \quad |\mu(x) \\
\iff \mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) &= \mu(x) \\
\iff D(\mu(x)y(x)) &= \mu(x) \\
\iff y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}(\int_{x_0}^x \mu(t)dt + C) \\
&= Ce^{\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}} + e^{\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}} \int_0^x e^{-\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}} dt.
\end{aligned}$$

Lisäämällä tähän alkuehdon saamme $C = y_0 = 1$, jolloin

$$y(x) = e^{\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}} + e^{\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}} \int_0^x e^{-\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}} dt.$$