

Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 6, syksy 2014

Huom. Tehtävä 3 muutettu uudestaan 3.12.

1. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y - 2 \\ \dot{y} &= -x - 2y.\end{aligned}$$

2. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y + 6 \\ \dot{y} &= -x + 2y - 3.\end{aligned}$$

3. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x^2 - y \\ \dot{y} &= 3 + 6x^2 - y^2.\end{aligned}$$

4. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x + 1)(y - 2) \\ \dot{y} &= x^2 - x - 2.\end{aligned}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Määritä myös systeemin radat.

5. Tarkastellaan yhtä 1.kl. differentiaaliyhtälöä (siis ongelman dimensio on $n = 1$)

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = 1. \quad (*)$$

(a) Anna kaksi $(*)$:n ratkaisua, jotka kumpikin toteuttavat alkuehdon $y(\pi/4) = 0$.

(b) Olkoon $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - \pi/4)^2 + y^2 < 1/4\}$. Osoita että alueessa B kulkee vain ne kaksi antamaasi AAT:n $(*)$, $y(\pi/4) = 0$, ratkaisua.

Ohje (b). OY-lause.

6. Tarkastellaan yhden differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävää

$$y'(x) = \frac{\sin y + 1}{x^2 - 1}, \quad y(0) = 0.$$

Olkoon $y : I \rightarrow \mathbf{R}$ sen (maksimaali)ratkaisu. Osoita että $I =] - 1, 1[$, ts. että ratkaisu y on olemassa välillä $] - 1, 1[$ (yhtälö ei ole edes määritelty kun $x = \pm 1$).

Ohje. Joko globaali OY-lause tai Poistumislause; älä yritä ratkaista eksplisiittisesti.