Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 3, syksy 2014

1. Olkoon funktio $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ parin AAT:n

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+y)(x^2+y^2-1) \\ (t-x)(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(0) = (1/2, 1/2),$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita systeemien Poistumislauseen (= lauseen 4.7 analogia) avulla, että funktio $\mathbf{z}$ on hengissä koko $\mathbf{R}$:ssä.

Ohje. Triviaaliratkaisut. Voiko ratkaisulle päteä $\|\mathbf{z}(t)\| \geq 1$? Syy. Kuva txy-koordinaatistossa voi auttaa.

2. Harjoituksen 1 tehtävän 1 yleisessä ratkaisussa on kolme parametria. Osoita sitovasti että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.

Ohje. Lause 5.4, tai jos haluat palauttaa systeemiksi, lause 5.3 tai 5.5 tai yksinkertaisimmin ehkä 5.9.

3. Kirjoita seuraava 2×2-homogeenisysteemi perinteellisesti auki ja ratkaise se:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{z}(t).$$

Montako vapaasti valittavaa parametria? Anna systeemille jokin perusjärjestelmä.

4. Osoita että funktiopari $\big(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\big) = \Big([1 \;\; e^t]^T,\; [e^{-t} \;\; 2]^T\Big)$ on lineaarisen 2×2-homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä $\mathbf{R}$:ssä.

5. Kirjoita seuraava lineaarinen 2×2-systeemi perinteellisesti auki ja ratkaise se sitten eliminointikeinolla:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

6. Etsi matriisikeinolla seuraavalle 3×3-homogeenisysteemille perusjärjestelmä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$