Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 2, syksy 2014

1. Osoita että funktio

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y+1}$$

ei ole tasaisesti Lip-jatkuva muuttujan y suhteen yhdessäkään suorakaiteessa K, jossa $(x,-1) \in K$ jollakin $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (vrt. harjoituksen 1 tehtävä 4).

2. Kahden kappaleen ongelman yhteydessä (planeetan kierto auringon ympäri) saatiin kiertolaisen vaihekulmafunktiolle $\theta = \theta(t)$ 1.kl. separoituva DY

$$\dot{\theta}(t) = c_1\Big(Kc_1^{-2} + c\cos\big(\theta(t) - \delta\big)\Big)^2,$$

jossa t on aikamuuttuja, ja δ, c, c_1 sekä K ovat vakioita. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla että DY:n (maksimaali)ratkaisu θ on määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä. Kiertomalli antaa siis globaalin ratkaisun planeetan liikkeelle.

Ohje. Kaikki tapahtuu (t,θ)-tasossa. Alkuehdoksi voit valita $\theta(0) = 0$ (voisi olla mikä hyvänsä). Väliarvolause.

3. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla että AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = 0,$$

(maksimaali)ratkaisu y on määritelty (eli hengissä) koko $\mathbf{R}$:ssä.

Ohje. Väliarvolause.

4. Sama tehtävä kuin 2, mutta käytä nyt Poistumislausetta 4.7.

Ohje. Yhtälöstä $\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \dot{\theta}(\tau)\,d\tau$ saadaan haarukka ratkaisulle (tämä kun kulkee eräässä sektorissa). Kompakteiksi joukoiksi kasvava jono suorakulmioita.

5. (a) Palauta DY $y^{(3)} + x^3\cos(y'') + \cos(x)y = \sin x$ 1.kl. systeemiksi.

(b) Palauta seuraava 2.kl. systeemi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) &= 0 \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + 2kx_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

6. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(t, x, y, \dot{x}) \\ \dot{y} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

(b) Entä jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin

$$\ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$