Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 1, syksy 2014

1. Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2.kl. teoriaa seuraava lineaarinen 3.kl. homogeeniyhtälö:

$$y^{(3)} + 4y'' + y' - 6y = 0.$$

Ohje. Polynomiyhtälön rationaaliratkaisut systemaattisesti kokeilemalla. Ei tarvitse (pilkun)tarkasti perustella että saat HY:n kaikki ratkaisut.

2. Olkoot $y_1 : I \to \mathbf{R}$ ja $y_2 :\to \mathbf{R}$ derivoituvia funktioita välillä I, ja pätekööt $W(y_1, y_2)(x) = 0$ ja $y_1(x) \neq 0 \neq y_2(x)$ kaikilla $x \in I$. Osoita että tällöin funktiot y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia, siis yhtälö $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, $x \in I$, toteutuu joillakin vakioilla c_1, c_2, joista ainakin toinen on $\neq 0$.

Ohje. Muodosta funktioita y_1 ja y_2 koskeva (yksi) differentiaaliyhtälö.

3. Onko funktio $f(x, y) = y^3 \cos x$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun

(a) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, 1]$,

(b) $I = \mathbf{R}$ ja $J = [0, 1]$,

(c) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, \infty[$?

Jos on, niin anna (jokin) käypä Lipschitz-vakio; kielteiseen tapaukseen riittää ei.

4. Missä $\mathbf{R}^2$:n mahdollisimman suurissa alueissa DY

$$y' = f(x, y) = x\sqrt[3]{y + 1}$$

toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassa olo alueissasi, mutta alueiden maksimaalisuutta ei tarvitse perustella.

Huom. Funktio f on määritelty koko xy-tasossa $\mathbf{R}^2$.

5. (a) Määrää neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle

$$y' = -y,\ y(0) = 2.$$

(b) Ratkaise AAT eksaktisti ja vertaa Picardin approksimaatteihin. Miltä näyttää?

6. (a) Määrää neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle

$$y' = x^{5/3} y + 1,\ y(0) = 1.$$

(b) Ratkaise AAT myös eksaktisti (jää pelkistymätön integraali).