Diff.yht. II, kurssikoe 16.12.2014, ratkaisut ja arvostelukommentit (Jouni Luukkainen 26.12.)

Teht. 1. *Määrää seuraavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratk. Käytetään ensin **matriisikeinoa**. Olkoon $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1.$$

Ominaisarvo $\lambda = -1$ on siis karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri (eli sen algebrallinen kertaluku on kaksi). Määritetään vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - (-1)I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow u_2 = -u_1 \Longleftrightarrow \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ominaisavaruus on siis yksiulotteinen (eli ominaisarvon geometrinen kertaluku on yksi). Valitsemalla a=1 saadaan perusjärjestelmään ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Huomataan, että

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten jokainen vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ toteuttaa yhtälön $(A+I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ja on siis ominaisarvoon $\lambda = -1$ liittyvä A:n yleistetty ominaisvektori. Valitaan sellainen yleistetty ominaisvektori $\mathbf{v}$, joka ei ole ominaisvektori; esim. $\mathbf{v} = (1, 0)$. Näin saadaan perusjärjestelmään toinen ratkaisu

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-t}(\mathbf{v} + t(A+I)\mathbf{v}) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}.$$

Siis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Voidaan myös ohittaa ominaisvektorit ja valita $\mathbb{R}^2$:n kannan muodostavat yleistetyt ominaisvektorit $[1 \quad 0]^T$ ja $[0 \quad 1]^T$, jolloin saadaan perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, jossa $\mathbf{x}_2$ on yllä ja

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää **eliminointikeinoa**. Kirjoittamalla $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ systeemi tulee muotoon

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \qquad (1) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad (2) \end{cases}.$$

Nyt

$$\ddot{x}_2(t) \overset{(2)}{=} \dot{x}_1(t) \overset{(1)}{=} -2x_1(t) - x_2(t) \overset{(2)}{=} -2\dot{x}_2(t) - x_2(t),$$

joten systeemi saadaan muotoon

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) + 2\dot{x}_2(t) + x_2(t) = 0 \qquad (3) \\ x_1(t) = \dot{x}_2(t) \qquad (4) \end{cases}.$$

(Todellakin, jos (3) ja (4) pätevät, niin kääntäen (1) ja (2) pätevät, sillä

$$\dot{x}_1(t) \overset{(4)}{=} \ddot{x}_2(t) \overset{(3)}{=} -2\dot{x}_2(t) - x_2(t) \overset{(3)}{=} -2x_1(t) - x_2(t).)$$

Ratkaistaan nyt systeemi (3)&(4). Vakiokertoimisen 2. kl. HY:n (3) KY:llä $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ on kaksinkertainen juuri $r = -1$ ja HY:llä siis yleinen ratkaisu $x_2(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$. Tällöin

$$x_1(t) = \dot{x}_2(t) = -C_1e^{-t} + C_2(e^{-t} - te^{-t}).$$

Siis systeemin yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1e^{-t} + C_2(e^{-t} - te^{-t}) \\ C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \end{bmatrix} = C_1e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}.$$

Täten systeemillä on perusjärjestelmä $(-\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ja siis myös perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ylläolevin merkinnöin.

Arvostelusta. Ominaisarvosta (väärä ominaisarvo tuhosi tehtävän), ominaisvektorista, ominaisvektorin avulla muodostetusta ratkaisusta (kuten $\mathbf{x}_1$) ja yhdestä "*aidosta*" yleistetystä ominaisvektorista (siis sellaisesta, joka ei kuulu ominaisavaruuteen) sai kustakin 1p; aidosta yleistetystä ominaisvektorista toisen ratkaisun (kuten $\mathbf{x}_2$) johtaminen toi 2p. Jos ei määrittänyt ominaisvektoreita, niin kahdesta keskenään lineaarisesti riippumattomasta yleistetystä ominaisvektorista sai 2p ja vastaavasti niistä lähtien kahden ratkaisun (kuten $\mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_3$) johtaminen toi 3p.

Yksi oli yrittänyt eliminointikeinoa.

Teht. 2. *Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix}.$$

Ratk. Systeemi on lineaarinen. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Etsitään ensin homogeeniselle systeemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ perusjärjestelmä. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0);$$
$$(A + I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -2u_1 \iff \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Täten $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}(1, 2)$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-t}(1, -2)$ antavat homogeenisen systeemin perusjärjestelmän $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Huomataan, että epähomogeenisuustermi $\mathbf{f}(t) = e^t(2, -3)$ ei sisälly homogeenisen systeemin ratkaisuihin. Tehdään siksi täyden yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi **yrite** $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(t) = e^t\mathbf{a}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ **määritettävin kertoimin** $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Yritteelle on

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff e^t\mathbf{a} = e^tA\mathbf{a} + e^t(2, -3) \iff (A - I)\mathbf{a} = (-2, 3) \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Saatiin yksittäisratkaisu $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(t) = (1/4)e^t(3, -8)$.

Vaihtoehtoisesti **variointikeinolla** määritetään derivoituva funktio $\mathbf{c} = (c_1, c_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ niin, että $\mathbf{x}_\mathrm{p}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$ on ratkaisu; tässä $X = [\,\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2\,]$ on homogeenisen systeemin perusmatriisi. Ehdoksi tulee

$$\begin{aligned} X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) &\iff \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix} \iff \begin{cases} e^{3t}\dot{c}_1(t) + e^{-t}\dot{c}_2(t) = 2e^t \\ 2e^{3t}\dot{c}_1(t) - 2e^{-t}\dot{c}_2(t) = -3e^t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4e^{3t}\dot{c}_1(t) = e^t \\ 4e^{-t}\dot{c}_2(t) = 7e^t \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{c}_1(t) = (1/4)e^{-2t} \\ \dot{c}_2(t) = (7/4)e^{2t} \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} c_1(t) = -(1/8)e^{-2t} \\ c_2(t) = (7/8)e^{2t} \end{cases}. \end{aligned}$$

Siis

$$\mathbf{x}_\mathrm{p}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ 7e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -e^t + 7e^t \\ -2e^t - 14e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{4}e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Täten täyden systeemin yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} + C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Koko yhtälön voi myös ratkaista **eliminointikeinolla**; eliminoimalla ensin x_2 saadaan ekvivalentti yhtälöpari

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - 3x_1 = -3e^t \\ x_2 = \dot{x}_1 - x_1 - 2e^t \end{cases}.$$

Arvostelusta. Homogeenisen systeemin ratkaiseminen oli 3p arvoinen: ominaisarvojen määritys sekä ratkaisut $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ toivat kukin 1p. Saattoi vaihtoehtoisesti antaa myös homogeenisen systeemin yleisen ratkaisun tai perusmatriisin. Täyden systeemin yleisen ratkaisun muoto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{p} + C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2$ oli hyvin hallinnassa; siitä ei erikseen hyvitetty, mutta yksi menetti 1p, kun oli unohtanut vakiot C_1 ja C_2.

Yksi oli käyttänyt eliminointikeinoa, mutta johtanut sekä x_1:lle että x_2:lle 2. kl. yhtälön.

Teht. 3. (a) (3 pist.) *Palauta* 2. *kl. differentiaaliyhtälö*

$$\ddot{x} - 2x\cos(\dot{x}) + \dot{x} - x^2 + 3 = 0$$

yhtäpitäväksi 1. *kl. pariksi.*

(b) (3 pist.) *Ratkaise tämän parin kriittiset pisteet ja Poincarén teoreeman avulla niiden laatu (stabiili vai epästabiili).*

Ratk. (a) Normaalimuoto $\ddot{x} = 2x\cos\dot{x} - \dot{x} + x^2 - 3$ on autonominen ja epälineaarinen. Tehdään siihen sijoitus $z_1(t) = x(t)$ ja $z_2(t) = \dot{x}(t)$. Tällöin saadaan epälineaarinen autonominen normaalimuotoinen 1. kl. pari

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2z_1\cos z_2 + z_1^2 - z_2 - 3 \end{cases}.$$

Käänteiseen suuntaan sijoitus on $x(t) = z_1(t)$ (sen oli esittänyt korkeintaan yksi, eikä sitä vaadittu).

Vaihtoehtoinen merkintätapa on säilyttää x ja tehdä lisäksi sijoitus $y(t) = \dot{x}(t)$, jolloin tulee pari

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x\cos y + x^2 - y - 3 \end{cases}.$$

(b) Kullakin $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ asetetaan $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (z_2, 2z_1\cos z_2 - z_2 + z_1^2 - 3)$, jolloin $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Määritetään systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} &\iff \begin{cases} z_2 = 0 \\ 2z_1\cos z_2 - z_2 + z_1^2 - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z_1 + z_1^2 - 3 = (z_1 - 1)(z_1 + 3) = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \mathbf{z} \in \{(1, 0), (-3, 0)\}. \end{aligned}$$

Linearisoidaan:

$$A(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{z}) & \partial_2 f_1(\mathbf{z}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{z}) & \partial_2 f_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\cos z_2 + 2z_1 & -2z_1 \sin z_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$A(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A(-3,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Etsitään näiden matriisien ominaisarvot:

$$\det(A(1,0) - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17};$$
$$\det(A(-3,0) - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 4 = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{15}.$$

Siis matriisin $A(1,0)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset ja matriisin $A(-3,0)$ ominaisarvot ovat kompleksiset sekä reaaliosaltaan negatiiviset. Täten kummassakaan tapauksessa 0 ei ole ominaisarvo eikä matriisin determinantti siis häviä, ja kummassakin tapauksessa ominaisarvot ovat keskenään erisuuret. Näin ollen Poincarén lause soveltuu molemmissa tapauksissa: kriittinen piste $(1,0)$ on epästabiili (satulapiste) ja kriittinen piste $(-3,0)$ on stabiili (asymptoottisesti stabiili).

Arvostelusta. (a) Epälineaarisuuden tähden systeemille ei saada matriisiesitystä, vaikka moni yritti; sakkoa ei kuitenkaan mennyt, jos ensin antoi parin oikein.

(b) Kriittisten pisteiden määritys oli 1p arvoinen. Linearisointi oli oleellista, joten siinä epäonnistuminen katkaisi jatkon. Matriisien $A(\mathbf{z})$, $A(1,0)$ ja $A(-3,0)$ laskemisen osuus oli 1p. Kriittisten pisteiden laadun määritys ominaisarvojen määrittämisen kautta toi 1p.

Teht. 4. *Tarkastellaan yhden differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävää*

$$y' = \frac{2\sin^2(xy)}{x+1}, \quad y(0) = 1.$$

Olkoon $y\colon I \to \mathbb{R}$ sen (maksimaali)ratkaisu. Osoita, että $I = \,]-1,\infty[$, ts., että ratkaisu y on olemassa kaikilla $x \in \,]-1,\infty[$.

Ratk. Huomataan, että $x+1=0 \iff x=-1$ ja että alkuarvokohdalle on $0 > -1$. Otetaan siksi differentiaaliyhtälön määrittelyalueeksi avoin puolitaso $D = \,]-1,\infty[\, \times \mathbb{R}$. Differentiaaliyhtälön määrittelevä funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{2\sin^2(xy)}{x+1} \quad \left(= \frac{1-\cos(2xy)}{x+1} \right),$$

on jatkuva ja sillä on jatkuva osittaisderivaatta $\partial_2 f$,

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{4x\cos(xy)\sin(xy)}{x+1} \quad \left(= \frac{2x\sin(2xy)}{x+1} \right).$$

Täten lokaalin olemassa- ja yksikäsitteisyyslauseen ja samalla (yleisemmin) myös poistumislauseen oletukset ovat voimassa. Siis tehtävän alkuarvo-ongelmalla on todellakin olemassa yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu $y\colon I \to \mathbb{R}$ avoimella välillä $I \subset \,]-1,\infty[$, ja ratkaisun kuvaaja juoksee "reunalta reunalle".

Globaalilla OY-lauseella. Tällöin yllä ei tarvitse todeta $\partial_2 f$:n jatkuvuutta. Olkoon $[a,b] \subset \,]-1,\infty[$. Tarkastellaan suorakaidetta $S = [a,b] \times \mathbb{R} \subset D$. Nyt

$$|\partial_2 f(x,y)| = \frac{4|x||\cos(xy)||\sin(xy)|}{x+1} \le \frac{4|x|}{x+1} \le M = \frac{4\max(|a|,|b|)}{a+1} \qquad \text{kaikilla } (x,y) \in S.$$

(Voisi tietysti ottaa $M = \max_{t\in[a,b]}(4|t|/(t+1)) < \infty$, jos haluaisi välttää eksplisiittisen lausekkeen löytämisen a:n ja b:n avulla.) Tämä riittää, sillä väliarvolauseen nojalla tästä seuraa, että kaikilla $(x,y_1),(x,y_2) \in S$

on olemassa $\xi \in \mathbb{R}$, jolla $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |\partial_2 f(x,\xi)||y_1-y_2| \le M|y_1-y_2|$. Siis f on M-Lipschitz jälkimmäisen muuttujan suhteen suorakaiteessa S. (Lipschitz-vakioksi kävisi jopa $M/2$ ylläolevan kaksinkertaisen kulman kosiniin ja siniin perustuneen laskun nojalla.)

Täten globaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen oletukset ovat voimassa. Siis $I =]-1,\infty[$.

Poistumislauseella. Havaitaan, että $y'(x) = 2\sin^2(xy(x))/(x+1) \ge 0$ kaikilla $x \in I$, joten y on kasvava. Jos $a = \inf I > -1$ tai $b = \sup I < \infty$, niin poistumislauseen mukaan vastaavasti on $\lim_{x\to a+} y(x) = -\infty$ tai $\lim_{x\to b-} y(x) = \infty$. Osoitetaan kumpikin mahdottomaksi.

Kaikilla $x \in I$ on $y'(x) = 2\sin^2(xy(x))/(x+1) \in [0, 2/(x+1)$. (Itse asiassa kaikilla $(x,y) \in D$ on $0 \le f(x,y) \le 2/(x+1)$.) Täten, jos $x \in I$, niin

$$|y(x) - y(0)| = |\int_0^x y'(t)\,dt| \le \left|\int_0^x \frac{2}{t+1}\,dt\right| = 2|\ln(x+1)|.$$

Siis $y(x) \le 1 + 2\ln(x+1)$ kaikilla $x \in I \cap [0,\infty[$, joten $\sup I = \infty$, ja $y(x) \ge 1 - 2|\ln(x+1)|$ kaikilla $x \in I \cap]-1,0]$, joten $\inf I = -1$. (Tulos $\inf I = -1$ nähtäisiin myös siitä, että koska yhtälöllä on triviaaliratkaisu $x \mapsto 0$ välillä $]-1,\infty[$ ja koska $y(0) = 1 > 0$, niin $y(x) > 0$ kaikilla $x \in I$.)

Tietystikään y:n kasvavuutta ei tarvita, vaan riittää huomata, että funktio $h\colon\ ]-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $h(x) = 2|\ln(x+1)|$, on jatkuva ja

$$1 - h(x) \le y(x) \le 1 + h(x) \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Nythän, jos $-1 < a < 0 < b < \infty$, niin merkitsemällä $c = \min_{x\in[a,b]}(1-h(x))$, $d = \max_{x\in[a,b]}(1+h(x))$ ja $K = [a,b] \times [c,d] \subset D$ on $(x,y(x)) \in K$ kaikilla $x \in I \cap [a,b]$, joten $\inf I < a$ ja $\sup I > b$.

Integroinnin sijasta voidaan käyttää väliarvolausetta. Jos $x \in I$, niin on olemassa $\xi \in I$, jolla

$$|y(x) - y(0)| = |y'(x)||x-0| = \frac{2\sin^2(xy(x))}{x+1}|x| \le \frac{2|x|}{x+1}.$$

Nyt, jos $h(x) = 2|x|/(x+1)$ kaikilla $x > -1$, niin $h(x) \le 2$, jos $x \ge 0$, ja $h(x) \le 2/(x+1)$, jos $-1 < x \le 0$. Täten $-1 \le y(x) \le 3$, kun $x \in I$ ja $x \ge 0$, joten $\sup I = \infty$, ja $1 - 2/(a+1) \le y(x) \le 1 + 2/(a+1)$, kun $-1 < a < 0$, $x \in I$ ja $a \le x \le 0$, joten $\inf I = -1$.

Arvostelusta. Funktion f jatkuvuuden mainitseminen oli 1p arvoista. Poistumislauseen yhteydessä derivaatan $\partial_2 f$ jatkuvuuden mainitseminen oli samoin 1p arvoista. Muutoin kvantitatiiviset arvioinnit olivat kaikki kaikessa. Siis arvio $|\partial_2 f(x,y)| \le 4\max(|a|,|b|)/(a+1)$ $\forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ tai vastaava globaalin OY-lauseen yhteydessä ja arvio $|y'(x)| \le 2/(x+1)$ ja siitä seuraava arvio $|y(x)-1| \le h(x) = 2|\ln(x+1)|$ tai $= 2|x|/(x+1)$ poistumislauseen yhteydessä. Lipschitz-ehdon johtaminen globaalin OY-lauseen yhteydessä tai kompaktien joukkojen $K \subset D$ tarkastelu poistumislauseen yhteydessä eivät olleet enää niin keskeisiä.