Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 6, syksy 2014
Ratkaisuehdotuksia (Vesa Piilola)

Tehtävä 1. Ratkaise yhtälö

$$3y'' + 2y' + y = 0.$$

Ratkaisu
Kyseessä on vakiokertoiminen toisen kertaluvun homogeeniyhtälö. Verraten viime viikon tehtävän 5 malliratkaisuissa esitettyyn huomautukseen karakteristinen yhtälö on luettavissa myös ei normaalimuotoisesta yhtälöstä $ay'' + by' + cy = 0$.

Annetun HY:n karakteristisen yhtälön ratkaisu on nyt

$$\begin{aligned} 3r^2 + 2r + r = 0 \Leftrightarrow r &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} \\ &= \frac{-1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i. \end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksisia. Näin ollen lauseen **3.13** nojalla HY:llä on perusjärjestelmä $(e^{\frac{-x}{3}} \cos(\frac{\sqrt{2}}{3}x), e^{\frac{-x}{3}x} \sin(\frac{\sqrt{2}}{3}x))$.
Yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = C_1 e^{\frac{-x}{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + C_2 e^{\frac{-x}{3}x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right).$$

Tehtävä 2. Ratkaise yhtälö

$$\ddot{x} + 9x = 4t - \sin t$$

käyttäen sopivaa yritettä.

Ratkaisu.

Ratkaistaan aluksi vastaava homogeeniyhtälö

$$\ddot{x} + 9x = 0.$$

Tätä vastaavan karakteristisen yhtälön juuret ovat:

$$r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3i.$$

Yhtälön perusjärjestelmä on siis $(x_1(t),\, x_2(t)) = (\cos 3t,\, \sin 3t)$.

Etsitään vielä yhtlön yksittäisratkaisu käyttäen yritettä $x_p(t) = At + B + C\sin t + D\cos t$, missä A,B,C,D ovat vakioita. Nyt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A + C\cos t - D\sin t \\ \ddot{x} &= -C\sin t - D\cos t. \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä alkuperäiseen diffisyhtälöön saamme

$$\begin{aligned} -C\sin t - D\cos t + 9At + 9B + 9C\sin t + 9D\cos t = 4t - \sin t \\ \Leftrightarrow 8C\sin t + 8D\cos t + 9At + 9B &= 4t - \sin t. \end{aligned}$$

Nyt saamme kiinnitettyä vakiot:

$$\begin{cases} A &= 4/9 \\ B &= 0 \\ C &= -1/8 \\ D &= 0. \end{cases}$$

Nyt on siis löydetty yksittäisratkaisu $x_p(t) = \frac{4}{9}t - \frac{1}{8}\sin t$.

Lauseen **3.15** nojalla yhtälön yleinen ratkaisu on tällöin

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \frac{4}{9}t - \frac{1}{8}\sin t + c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) \quad ,c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Huomautus Yritteen termit B ja D olivat siis tarpeettomia. Vakiotermin B kohdalla tämän olisi tosiaan voinut päätellä myös etukäteen, sillä EHY:n oikean puolen funktio $r(x)$ ei sisällä vakiota. Vastaavasti cos:ini termin voi päätellä turhaksi, koska termissä $r(x)$ ei esiinny cos:inia ja vasemmalla puolella "yritteen"ensimmäistä derivaattaa ei esiinny eikä termin At derivaattaa tarvitse kumota.

Tehtävä 3. Ratkaise yhtälö

$$\ddot{x} - 9x = e^{-3t}$$

variointikeinolla.

Ratkaisu.

Ratkaistaan diffisyhtälön perusjärjestelmä tutkimalla vastaavan homogeeniyhtälön karakteristista yhtälöä. Vastaavan karakteristisen yhtälön ratkaisu on:

$$r^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3.$$

Kurssin aikaisempien tietojen perusteella tiedetään, että yhtälön perusjärjestelmän muodostavat tällöin funktiot $(x_1(t), x_2(t)) = (e^{3t}, e^{-3t})$.

Etsitään vielä yksittäisratkaisu varioitikeinolla. Lähdetään liikkeellä yritteestä

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \quad c_1(t), c_2(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Luentomonisteen sivuilla 41 ja 42 on näytetty, että funktiot $c_1(t)$ ja $c_2(t)$ saadaan kaavoista

$$c_1(t) = -\int \frac{r(t)x_2(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt \quad \text{ja} \quad c_2(t) = \int \frac{r(t)x_1(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt,$$

missä $r(t)$ on alkuperäisen EHY:n oikea puoli. Lasketaan vielä perusjärjestelmän Wronskin determinantti:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ 3e^{3t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -6.$$

Nyt voidaan määrittää funktiot $c_j(t)$:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int \frac{e^{-3t}e^{-3t}}{-6}dt = \int \frac{1}{6}e^{-6t}dt = \frac{1}{36}e^{-6t} \\ c_2(t) &= \int \frac{e^{-3t}e^{3t}}{-6}dt = \int -\frac{1}{6}dt = -\frac{1}{6}t. \end{aligned}$$

Yksittäisratkaisuksi saatiin siis

$$x_p(t) = \frac{1}{36}e^{-6t}e^{3t} - \frac{1}{6}te^{-3t} = e^{-3t}\left(-\frac{1}{6}t + \frac{1}{36}\right).$$

Lyhyellä tarkastelulla voi osoittaa, että tämä tosiaan toteuttaa alkuperäisen EHY:n.

Yleinen ratkaisu on tällöin siis

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_p(t) + ax_1(t) + bx_2(t) \\
&= e^{-3t}\left(-\frac{1}{6}t + \frac{1}{36}\right) + ae^{3t} + be^{-3t} \\
&= -\frac{1}{6}te^{-3t} + ae^{3t} + (b + \frac{1}{36})e^{-3t} \\
&= -\frac{1}{6}te^{-3t} + ae^{3t} + b_1e^{-3t}, \quad a, b, b_1 \in \mathbb{R} \quad \text{ja } b_1 = b + \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Mikäli tehtävässä haluaisi käyttää jotain suoraa yritettä niin se voisi olla muotoa:

$$x(t) = Atr(t) = Ate^{-3t}.$$

Syy tälläiseen yritteeseen on, että e^{-3t} toteuttaa HY:n, jolloin termiä Be^{-3t} ei yritteessä tarvita. Toisaalta t:llä kertominen tarvitaan.

Tehtävä 4. Ratkaise välillä $]0, \infty[$ HY

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0,$$

(a) yritteellä $y(x) = x^a$, jossa a on parametri,
(b) vapaan muuttujan sijoituksella $x = x(t)$.

Ratkaisu.
(a)
Tehdään yrite $y(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{C}$). Nyt

$$y'(x) = ax^{a-1} \quad \text{ja} \quad y''(x) = a(a-1)x^{a-2}.$$

Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan ratkaistua parametrin a arvo. Nyt

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y &= 0 \\
\Leftrightarrow a(a-1)x^{a-2} + ax^{a-2} + x^{a-2} &= 0 \\
\Leftrightarrow (a^2+1)x^{a-2} &= 0. \\
\Leftrightarrow a^2 + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Nyt saadaan a:lle arvot

$$a = \pm i.$$

Olemme löytäneet kompleksiset ratkaisut $y(x) = x^{\pm i}$. Yritetään kuitenkin vielä muokata näitä, jotta saataisiin aikaan reaaliset vastaukset. Huomataan

$$x^{\pm i} = e^{\ln(x^{\pm i})} = e^{\pm i \ln x} \overset{Euler}{=} \cos(\ln x) \pm i \sin(\ln(x)).$$

Merkitään vaikka $y_1(x) = \cos(\ln x) + i \sin(\ln(x))$ ja $y_2(x) = \cos(\ln x) - i \sin(\ln(x))$.

Nyt koska nämä molemmat ovat annetun DY:n ratkaisuita, niin myös niiden lineaarikombinaatiot ovat ratkaisuita.
Erityisesti reaaliset funktiot

$$y_1^*(x) = \frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{2}(2\cos(\ln x)) = \cos(\ln(x))$$

ja

$$y_2^*(x) = \frac{1}{2i}(y_1(x) - y_2(x)) = \frac{1}{2}(2\sin(\ln x)) = \sin(\ln(x))$$

ovat ratkaisuita. Tutkitaan vielä tämän uuden parin Wronskin determinantti:

$$W(y_1*, y_2*)(x) = \begin{vmatrix} \cos\ln x & \sin\ln x \\ \frac{-1}{x}\sin\ln x & \frac{1}{x}\cos\ln x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\cos^2\ln x + \frac{1}{x}\sin^2\ln x = \frac{1}{x} \neq 0, \quad x > 0.$$

Olemme siis löytäneet reaalisen perusjärjestelmän välille $]0, \infty[$, joten yleinen ratkaisu on tällöin

$$y(t) = c_1 y_1^*(t) + c_2 y_2^*(t) = c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \sin(\ln(x)).$$

(b)
Tehdään sijoitus $x = x(t) = e^t$. Tällöin uusi tuntematon funktio on $z(t) = y(x(t)) = y(e^t)$.
Derivoidaan tätä:

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \Leftrightarrow y'(t) = e^{-t} z'(t);$$

$$\begin{aligned} z''(t) &= e^t y'(e^t) + e^t e^t y''(e^t) \\ \Leftrightarrow y''(e^t) &= e^{-2t} z''(t) - e^{-t} y'(e^t) \\ &= e^{-2t} z''(t) - e^{-2t} z'(t) \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä nyt annettuun DY:hyn:

$$\begin{aligned} y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow e^{-2t} z''(t) - e^{-2t} z'(t) + e^{-t}\left(e^{-t} z'(t)\right) + e^{-2t} z(t) = 0 \\ \Leftrightarrow e^{-2t}(z''(t) + z(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow z''(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

Ratkaisut saadaan toisen kertaluvun vakiokertoimisen DY:n $z''(t) + z(t) = 0$ karakteristisestä yhtälöstä:

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i.$$

Näin ollen kurssin tietojen perusteella tällä HY:llä on perusjärjestelmä

$$z_1(t) = \cos x, \quad z_2(t) = \sin t.$$

Nyt alkuperäisen HY:n perusjärjestelmä saadaan takaisinsijoittamalla $t = \ln x$, jolloin

$$y_1(x) = z_1(\ln x) = \cos(\ln x)$$

ja

$$y_2(x) = z_2(\ln x) = \sin(\ln x).$$

Tehtävä 5. Etsi homogeeniyhtälön

$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0 \tag{1}$$

toinen riippumaton ratkaisu kertaluvun pudotuksella kun oletetaan tiedetyksi, että funktio $y_1(x) = e^{2x}$ on ratkaisu koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu.
Huomataan, että $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen voidaan lähteä soveltamaan kertaluvun pudotusta. Muunnetaan annettu DY normaalimuotoon

$$y'' + \frac{-4x+7}{x-2}y' + \frac{4x-6}{x-2}y = 0, \quad x \neq 2.$$

Merkitään vielä $p(x) = \dfrac{-4x+7}{x-2}$ ja $q(x) = \dfrac{4x-6}{x-2}$.

Etsitään nyt toista ratkaisua yritteellä $y(x) = u(x)y_1(x)$, jossa $u(x)$ oletetaan kahdesti derivoituvaksi. Lasketaan nyt tämän yritteen derivaatat, jolloin saadaan $y' = u'y_1 + uy_1'$ ja $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$.

Sijoittamalla nämä derivaatat takaisin annettuun DY:hyn ja soveltamalla tietoa, että y_1 on sen ratkaisu voidaan johtaa u:n derivaatalle lineaarinen 2. kertaluvun DY:

$$u'' + \frac{2y_1' + py_1}{y_1}u' = 0.$$

Tässä merkitsemällä $v(x) = u'(x)$ se palautuu tavalliseksi 1. kertaluvun lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi. Nyt kun etsitään tälle DY:lle integroiva tekijä, ratkaistaan v lineaarisen DY:n ratkaisumenetelmällä ja lopulta integroidaan v saamme ratkaistua tuntemattoman funktion u.

Yksityiskohdat löytyvät luentomonisteen sivuilta 40.

Lopulta saamme

$$u(x) = \int v(x)dx = \int y_1(x)^{-2} \exp(-\int^x p(t)dt)dx.$$

Etsimämme yrite oli muotoa

$$y(x) = u(x)y_1(x).$$

Koska osaamme nyt ratkaista u:n, voimme kirjoittaa meidän toisen ratkaisumme:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_1(x) \int y_1(x)^{-2} \exp(-\int^x p(t)dt)dx \\
&= e^{2x} \int e^{-4x} \exp(-\int^x \frac{-4t+7}{t-2} dt)dx \\
&= e^{2x} \int e^{-4x} \exp(-\int^x \frac{-4(t-2)-1}{t-2} dt)dx \\
&= e^{2x} \int e^{-4x} \exp(-\int^x -4 - \frac{1}{t-2} dt)dx \\
&= e^{2x} \int e^{-4x} \exp(4x + \ln|x-2|)dx \\
&= e^{2x} \int e^{-4x} e^{4x} |x-2| dx \\
&= e^{2x} \int |x-2| dx \\
&= e^{2x} \int \delta_x (x-2)dx = \frac{1}{2} e^{2x} \delta_x (x-2)^2,
\end{aligned}$$

missä $\delta_x = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 2 \\ -1, & \text{kun } x < 2. \end{cases}$

Pienellä tarkistuksella voi jälleen osoittaa, että tämä funktio tosiaan toteuttaa annetun DY:n. Ja lauseen **3.14** nojalla tämä tosiaan on ensimmäisestä ratkaisusta riippumaton ratkaisu.

Yhtälön yleinen ratkaisu väleillä $]-\infty, 2[$ ja $]2, \infty[$ on siis

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}(x-2)^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tämä lauseke toteuttaa jatkuvuuden nojalla yhtälön myös pisteessä $x = 2$. Se on siis yleinen ratkaisu.

Tehtävä 6.
(a) Antaako tämä yleinen ratkaisu kaikki ratkaisut $\mathbb{R}$:ssä?
(b) Onko AAT:llä (1) ja $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$ ratkaisua? Syy?

Ratkaisu.
(a)
Standardimuoto on määritelty $\mathbb{R}^2$:n alueissa $D_1 = \{x > 2\}$ ja $D_2 = \{x < 2\}$, ja lineaarisen teorian, erityisesti lauseen 3.14, nojalla funktiopari (y_1, y_2) on pj. toisaalta välillä $]2, \infty[$, toisaalta välillä $]-\infty, 2[$: näissä kaikki ratkaisut saadaan lineaarikombinaatioina $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Toisaalta sama kombinaatio on DY:n yleinen ratkaisu koko $\mathbb{R}$:ssä, mutta teoria ei kerro suoraan saadaanko siitä kaikki ratkaisut $\mathbb{R}$:ssä. Ratkaisu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on muotoa $c_1 y_1 + c_2 y_2$ seka arvoilla $x > 2$ etta arvoilla $x < 2$; kyse on siita ovatko kertoimet eri puolilla samat (siis mahdollinen "liimaaminen").

Olkoon $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin merkitään vaikka $y_+(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ kun $x \geq 2$, $y(x) = d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x)$ kun $x \leq 2$,missä $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Lineaarisen teorian nojalla rajoittumille pätee

$$y|_{]2,\infty[} = y_+|_{]2,\infty[} \quad \text{ja} \quad y|_{]-\infty,2[} = y_-|_{]-\infty,2[}$$

joillakin $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.Jatkuvuus pisteessä 2 antaa

$$y|_{[2,\infty[} = y_+|_{[2,\infty[} \quad \text{ja} \quad y|_{]-\infty,2]} = y_-|_{]-\infty,2]};$$

siten kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$y^{(k)}(2+) = y_+^{(k)}(2) = c_1 y_1^{(k)}(2) + c_2 y_2^{(k)}(2) \quad \text{ja}$$
$$y^{(k)}(2-) = y_-^{(k)}(2) = d_1 y_1^{(k)}(2) + d_2 y_2^{(k)}(2).$$

Lasketaan vielä auki y_1:n ja y_2:n derivaatat

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{2x} & y_2(x) &= e^{2x}(x-2)^2 \\
y_1'(x) &= 2e^{2x} & y_2'(x) &= 4e^{2x}(x-2)^2 + 2e^{2x}(x-2) \\
y_1''(x) &= 4e^{2x} & y_2''(x) &= 8e^{2x}(x-2)^2 + 8e^{2x}(x-2) + 4e^{2x}(x-2) + 2e^{2x}.
\end{aligned}$$

Koska y on ratkaisuna kahdesti dervoituva, vasen ja oikea derivaatta yhtyvät kertalukuun 2 asti:

$$\begin{aligned}
c_1 y_1^{(k)}(2) + c_2 y_2^{(k)}(2) &= y^{(k)}(2+) = y^{(k)}(2) = y^{(k)}(2-) \\
&= d_1 y_1^{(k)}(2) + d_2 y_2^{(k)}(2), \quad k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Nyt huomataan vielä, että $y_2(2) = 0$ ja $y_2'(2) = 0$, joilloin voimme kirjoittaa näistä ehdoista kolme yhtälöä:

$$\begin{aligned}
c_1 y_1(2) = y(2+) = y(2) = y(2-) &= d_1 y_1(2) \\
c_1 y_1'(2) = y'(2+) = y'(2) = y'(2-) &= d_1 y_1'(2) \\
c_1 y_1''(2) + c_2 y_2''(2) = y''(2+) = y''(2) = y''(2-) &= d_1 y_1''(2) + d_2 y_2''(2)
\end{aligned}$$

Tämä yhtälökolmikko antaa $c_1 = d_1$ ja $c_2 = d_2$. Näiden kertoimien yksikäsitteisyys on yhtäpitävää sen kanssa, että liimaamalla ei näin saatu uusia ratkaisuita.

Yleinen ratkaisu $y = c_1 y_1 + c_2 y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, antaa siis kaikki ratkaisut $\mathbb{R}$:ssä.

Tämän lisäksi vakiot c_1 ja c_2 määräytyy yksikäsitteisesti kolmikosta $(y(2), y'(2), y''(2))$. Ylläolevista yhtälöistä huomataan myös että $y(2)$ ja $y''(2)$ voidaan valita mielivaltaisesti, kun taas ensimmäiselle derivaatalle saadaan ehto $y'(2) = 2y(2)$.

(b)
Alkuarvotehtävällä (1) ja $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$ ei ole ratkaisua sillä. jos katsomme alkuperäistä DY:tä (1) pisteessä $x = 2$ saamme ehdon

$$\begin{aligned}
(2-2)y''(2) - (8-7)y'(2) + (8-6)y(2) &= 0 \\
\Leftrightarrow -y'(2) + 2y(2) &= 0 \\
\Leftrightarrow y'(2) &= 2y(2),
\end{aligned}$$

Nyt koska alkuarvossa

$$y'(2) = 0 \neq 2 = 2y(2),$$

niin alkuarvotehtävällä ei voi olla ratkaisua.

Tämä johtuu siitä, että OY-lauseen ehdot ovat voimassa vain väliellä $]-\infty, 2[$ ja $]2, \infty[$.