Differentiaaliyhtälöt I

Harjoitus 5, syksy 2014

Ratkaisuehdotuksia (Kristian Setälä)

① Ratkaise (implisiittisesti) yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-3x + y + 4}{x + 3y + 2}.$$

Ratkaisu. Yhtälö palautuu tasa-asteiseksi kuten monisteen kohdassa 1.5.4:

- Aloitetaan tekemällä sijoitukset

$$x = t + \alpha \quad \text{ja} \quad y(x) = z(x - \alpha) + \beta = z(t) + \beta,$$

missä α ja β ovat toistaiseksi tuntemattomia parametreja. Nyt $y'(x) = z'(t)$, joten yhtälö saa muodon

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{-3(t + \alpha) + z + \beta + 4}{t + \alpha + 3(z + \beta) + 2} = \frac{-3t + z + (-3\alpha + \beta + 4)}{t + 3z + (\alpha + 3\beta + 2)}.$$

Yritetään valita parametrit α ja β niin, että vakiotermit katoavat eli

$$-3\alpha + \beta + 4 = 0 \quad \text{ja} \quad \alpha + 3\beta + 2 = 0.$$

Tällä yhtälöparilla on (yksikäsitteinen) ratkaisu

$$\alpha = 1 \quad \text{ja} \quad \beta = -1.$$

Käyttämällä yllä sijoituksissa näitä parametrien arvoja voidaan siis DY kirjoittaa (alueissa $t \lessgtr 0$)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{-3t + z}{t + 3z} = \frac{-3 + z/t}{1 + 3z/t}.$$

- Saatu yhtälö on tasa-asteinen, niin kuin pitääkin. Se ratkeaa sijoituksella $w(t) = z(t)/t$ (moniste 1.5.2). Tällöin $z = wt$ ja $z' = w't + w$, joten yhtälö saa muodon

$$w't + w = \frac{-3 + w}{1 + 3w} \iff w' = \frac{\dfrac{-3 + w}{1 + 3w} - w}{t} = -\frac{3}{t} \cdot \frac{1 + w^2}{1 + 3w}.$$

- Viimeksi saatu yhtälö on separoituva. Koska $1 + w^2 > 0$ kaikilla w, niin sillä ei ole triviaaliratkaisuja. Muut alueissa $t \neq 0 \neq 1 + 3w$ kulkevat ratkaisut saadaan separoimalla:

$$w' = -\frac{3}{t} \cdot \frac{1+w^2}{1+3w} \iff \int \frac{1+3w}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \int -\frac{3}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Vasemmaksi puoleksi saadaan (ilman integroimisvakiota)

$$\int \frac{1+3w}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \int \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} + \frac{3}{2}\int \frac{2w\,\mathrm{d}w}{1+w^2} = \arctan w + \frac{3}{2}\ln(1+w^2).$$

Saadaan siis separoituvan DY:n implisiittiratkaisu

$$\begin{aligned} &\arctan w + \frac{3}{2}\ln(1+w^2) = -3\ln|t| + C_0 \\ \iff\ &2\arctan w + 3\ln(1+w^2) + 3\cdot 2\ln|t| = 2C_0 \\ \iff\ &2\arctan w + 3\ln\big((1+w^2)t^2\big) = C, \end{aligned}$$

missä $C = 2C_0 \in \mathbb{R}$.

- Sijoittamalla tähän takaisin $w = z/t$ saadaan

$$2\arctan\frac{z}{t} + 3\ln\left(\left(1+\frac{z^2}{t^2}\right)t^2\right) = 2\arctan\frac{z}{t} + 3\ln(t^2+z^2) = C,$$

ja sijoittamalla tähän $t = x - \alpha = x - 1$ ja $z = y - \beta = y + 1$ saadaan alkuperäisen yhtälön implisiittiratkaisu

$$2\arctan\frac{y+1}{x-1} + 3\ln\big((x-1)^2 + (y+1)^2\big) = C,$$

kun $x + 3y + 2 \neq 0$ ja $x \neq 1$.

- Viimeisillä sivuilla on hieman lisää asiaa tästä tehtävästä.

□

② Tutki Wronskin determinantin avulla, mitkä funktiopareista (y_1, y_2) eivät ainakaan voi olla jonkin 2.kl. lineaarisen homogeeniyhtälön perusjärjestelmä välillä $]0, \infty[$:

$$(x^3, x), \quad (\sin 2x, -\cos 2x), \quad (\sin 2x, \cos x).$$

Ratkaisu. Lauseen 3.8 mukaan, jos (y_1, y_2) on jonkin HY:n pj. välillä $]0, \infty[$, niin $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollain $x_0 \in\,]0, \infty[$, ja silloin seurauksen 3.9 nojalla $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ *kaikilla* $x \in\,]0, \infty[$. Siispä jos löydetään $x_0 \in\,]0, \infty[$, jolla $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, niin (y_1, y_2) ei voi olla minkään HY:n pj. tällä välillä.

- Parin (x^3, x) Wronskin determinantti on

$$W(x^3,x)(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^3 = -2x^3.$$

  Nyt $W(x^3,x)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]0,\infty[$, joten pari (x^3,x) *saattaa* olla jonkin HY:n pj. (Se onkin esimerkiksi yhtälön $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$ pj.)

- Parin $(\sin 2x, -\cos 2x)$ Wronski on

$$W(\sin 2x, -\cos 2x)(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x \\ 2\cos 2x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 2\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = 2 \neq 0$$

  kaikilla x. Siis pari saattaa olla jonkin HY:n pj. (Se on esimerkiksi yhtälön $y'' + 4y = 0$ pj.)

- Parin $(\sin 2x, \cos x)$ Wronski on

$$W(\sin 2x, \cos x)(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos x \\ 2\cos 2x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x \sin 2x - 2\cos x \cos 2x.$$

  Nyt esimerkiksi $W(\sin 2x, \cos x)(\pi/2) = 0$, missä $\pi/2 \in]0,\infty[$, joten $(\sin 2x, \cos x)$ ei voi olla minkään HY:n pj. tällä välillä.

$\square$

③ Tarkastellaan seuraavia funktiopareja (y_1, y_2):

$$(7e^{-2x}, e^{-2x}), \quad (-xe^{-2x}, -e^{-2x}), \quad (e^{-x}, -e^{-2x}).$$

a) Laske niiden Wronskit pisteissä $x \in \mathbb{R}$.

b) Perustele, mitkä pareista ovat 2.kl. lineaarisen HY:n $y'' + 4y' + 4y = 0$ perusjärjestelmiä välillä $\mathbb{R}$.

Ratkaisu.

a)

$$W(7e^{-2x}, e^{-2x})(x) = \begin{vmatrix} 7e^{-2x} & e^{-2x} \\ -14e^{-2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} W(-xe^{-2x}, -e^{-2x})(x) &= \begin{vmatrix} -xe^{-2x} & -e^{-2x} \\ -e^{-2x} + 2xe^{-2x} & 2e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= (e^{-2x})^2 \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2x-1 & 2 \end{vmatrix} = -e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$W(e^{-x}, -e^{-2x})(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & -e^{-2x} \\ -e^{-x} & 2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-3x}.$$

b)

- Koska $W(7e^{-2x}, e^{-2x})(x) = 0$, niin $(7e^{-2x}, e^{-2x})$ ei ole minkään HY:n pj. millään välillä. Erityisesti pari ei ole annetun HY:n perusjärjestelmä välillä $\mathbb{R}$.
- Merkitään $y_1 = -xe^{-2x}$ ja $y_2 = -e^{-2x}$. Tällöin

$$\begin{aligned} y_1' &= (2x-1)e^{-2x} & y_2' &= 2e^{-2x} \\ y_1'' &= 2e^{-2x} - 2(2x-1)e^{-2x} & y_2'' &= -4e^{-2x}, \\ &= (4-4x)e^{-2x} \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} &y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = (4-4x)e^{-2x} + 4(2x-1)e^{-2x} - 4xe^{-2x} = 0 \quad \text{ja} \\ &y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = -4e^{-2x} + 8e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0. \end{aligned}$$

Siis y_1 ja y_2 ovat annetun HY:n ratkaisuja (välillä $\mathbb{R}$). Koska lisäksi esimerkiksi $W(y_1, y_2)(0) = -1 \neq 0$, niin (y_1, y_2) on yhtälön pj. välillä $\mathbb{R}$.
- Jos $y = e^{-x}$, niin $y' = -e^{-x}$, $y'' = e^{-x}$ ja

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-x} - 4e^{-x} + 4e^{-x} = e^{-x} \neq 0.$$

Siis e^{-x} ei ole annetun HY:n ratkaisu ja näin ollen $(e^{-x}, -e^{-2x})$ ei ole yhtälön pj.

□

④ Etsi yritteellä $y(x) = x^a$, jossa a on parametri, välin $I = \,]0, \infty[$ perusjärjestelmä 2.kl. lineaariselle HY:lle

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0.$$

Ratkaisu. Nyt

$$y' = ax^{a-1} \quad \text{ja} \quad y'' = a(a-1)x^{a-2},$$

joten

$$\begin{aligned} y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y &= a(a-1)x^{a-2} + \frac{4}{x}ax^{a-1} - \frac{4}{x^2}x^a \\ &= (a(a-1) + 4a - 4)x^{a-2}. \end{aligned}$$

Siispä yrite on yhtälön ratkaisu, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0 \\ \iff &a(a-1) + 4a - 4 = 0 \\ \iff &a^2 + 3a - 4 = 0 \\ \iff &a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \\ \iff &a = -4 \text{ tai } a = 1. \end{aligned}$$

Saadaan HY:n ratkaisut $y_1 = x^{-4}$ ja $y_2 = x$. Parin Wronski pisteessä $1 \in I$ on

$$W(x^{-4}, x)(1) = \begin{vmatrix} 1^{-4} & 1 \\ -4 \cdot 1^{-5} & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

joten (x^{-4}, x) on annetun HY:n pj. välillä I. $\square$

⑤ Ratkaise yhtälöt

$$\text{(a)} \quad 3\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0, \qquad \text{(b)} \quad \ddot{x} + 4x = 4\dot{x}.$$

Ratkaisu. Huomautus. Monisteen tuloksissa karakteristinen yhtälö (KY) luetaan standardimuotoisesta HY:stä $y'' + ay' + by = 0$. KY:n voi kuitenkin lukea suoraan muotoa $ay'' + by' + cy = 0$ olevasta yhtälöstä. Nimittäin jos $a \neq 0$, niin sekä $ay'' + by' + cy = 0 \iff y'' + (b/a)y' + (c/a)y = 0$ että $ar^2 + br + c = 0 \iff r^2 + (b/a)r + (c/a) = 0$. Siis ratkaisemalla yhtälön $ar^2 + br + c = 0$ juuret saadaan yhtälön $r^2 + (b/a)r + (c/a) = 0$ juuret, mistä saadaan monisteen tuloksien avulla yhtälön $y'' + (b/a)y' + (c/a)y = 0$ ratkaisut, jotka ovat samalla yhtälön $ay'' + by' + cy = 0$ ratkaisut.

a) Kyseessä on vakiokertoiminen 2.kl. HY. Ratkaistaan sen karakteristinen yhtälö (KY):

$$\begin{aligned} 3r^2 + r - 2 = 0 &\iff r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} \\ &\iff r = -1 \text{ tai } r = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

KY:llä on kaksi eri reaalijuurta, joten lauseen 3.11 nojalla HY:llä on pj. $(e^{-t}, e^{\frac{2}{3}t})$ ja siten HY:n ratkaisut ovat

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{\frac{2}{3}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Tämäkin on vakiokertoiminen 2.kl HY: $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$. Karakteristisen yhtälön ratkaisu:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0 \iff r = 2.$$

KY:llä on kaksinkertainen reaalijuuri, joten lauseen 3.12 nojalla HY:llä on pj. (e^{2t}, te^{2t}) ja siten HY:n ratkaisut ovat

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

⑥ Ratkaise AAT

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Ratkaisu. Kyseessä on vakiokertoiminen HY, jonka karakteristisen yhtälön ratkaisu on

$$9r^2 + 12r + 4 = 0 \iff (3r+2)^2 = 0 \iff r = -\frac{2}{3}.$$

Lauseen 3.12 nojalla HY:llä on pj. $(e^{-\frac{2}{3}x}, xe^{-\frac{2}{3}x})$, joten yhtälön ratkaisut ovat

$$y = C_1 e^{-\frac{2}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{2}{3}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuehto $y(0) = 3$ antaa heti vakion $C_1 = y(0) = 3$. Lisäksi

$$y' = -\frac{2}{3}C_1 e^{-\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}C_2 x e^{-\frac{2}{3}x},$$

joten saadaan $y'(0) = -2 + C_2 = -1$, josta $C_2 = 1$. Siispä AAT:n ratkaisu on

$$y = 3e^{-\frac{2}{3}x} + xe^{-\frac{2}{3}x}.$$

□

Lisäanalyysiä tehtävään 1

- Tehtävän 1 ratkaisussa osoitettiin tarkkaan ottaen seuraava väite:

  Olkoon $y : \Delta \to \mathbb{R}$ jollain välillä Δ derivoituva funktio, missä $1 \notin \Delta$. Tällöin y toteuttaa yhtälön

  $$y'(x) = \frac{-3x + y(x) + 4}{x + 3y(x) + 2}$$

  kaikilla $x \in \Delta$, jos ja vain $x + 3y(x) + 2 \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$ ja on olemassa $C \in \mathbb{R}$ jolla y toteuttaa yhtälön

  $$2 \arctan \frac{y(x)+1}{x-1} + 3 \ln \big((x-1)^2 + (y(x)+1)^2 \big) = C$$

  kaikilla $x \in \Delta$.

  Ehto $x + 3y + 2 \neq 0$ tulee alkuperäisestä yhtälöstä, mutta $x \neq 1$ ei: OY-lausehan on nyt voimassa kaikkialla paitsi suoralla $x + 3y + 2 = 0$, joten erityisesti jokaisen pisteen $(1, y_1)$ kautta kulkee ratkaisu, kunhan $y_1 \neq -1$. Tarkastellaan siis vielä pistettä $x = 1$.

- Jos $y : \Delta \to \mathbb{R}$, $1 \in \Delta$, on DY:n ratkaisu, niin myös sen rajoittumat ovat ratkaisuja. Erityisesti rajoittumat väleille $\{x \in \Delta \mid x < 1\}$ ja $\{x \in \Delta \mid x > 1\}$ toteuttavat implisiittiratkaisun, joskin eri puolilla ykköstä voidaan saada eri vakio C (ja saadaankin, kuten alempana on osoitettu).

- Kääntäen, olkoon $\Delta \ni 1$ väli ja $y : \Delta \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio, joka toteuttaa implisiittiratkaisun väleillä $\{x \in \Delta \mid x < 1\}$ ja $\{x \in \Delta \mid x > 1\}$ (mukaan lukien ehdon $x + 3y(x) + 2 \neq 0$ kaikilla x ja eri väleillä mahdollisesti eri vakioilla). Tästä seuraa, että y toteuttaa DY:n kaikissa Δ:n pisteissä paitsi ehkä pisteessä 1. Osoitetaan, että y toteuttaa DY:n myös pisteessä 1. Nyt jokaiselle $x \in \Delta \setminus \{1\}$ löytyy väliarvolauseen nojalla $\xi_x \in]x, 1[$ (tai $\xi_x \in]1, x[$), jolla

$$y'(\xi_x) = \frac{y(1) - y(x)}{1 - x}.$$

Jos $x \to 1$, niin $\xi_x \to 1$, joten koska y on ratkaisu pisteen 1 ulkopuolella, saadaan

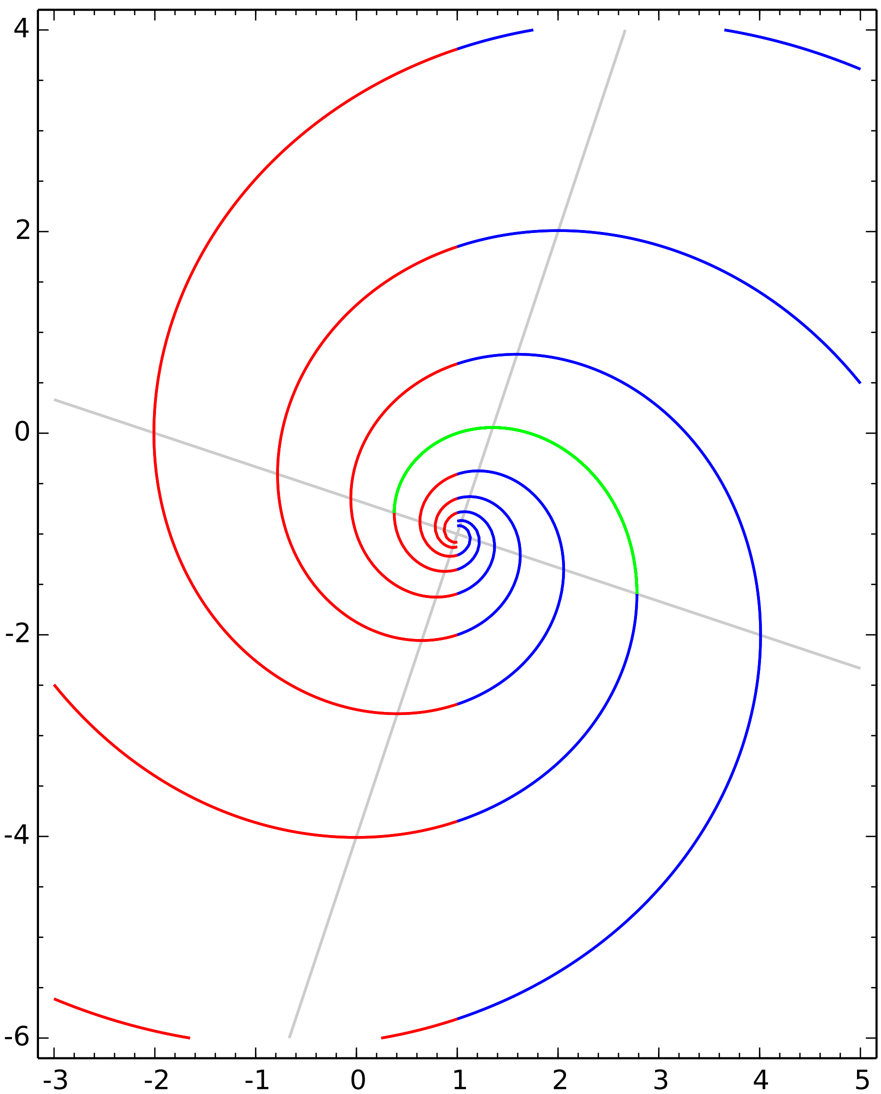
$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{y(1) - y(x)}{1 - x} = \lim_{x \to 1} y'(\xi_x) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-3\xi_x + y(\xi_x) + 4}{\xi_x + 3y(\xi_x) + 2} = \frac{-3 \cdot 1 + y(1) + 4}{1 + 3y(1) + 2}, \end{aligned}$$

kuten haluttiin.

- Saadaan siis seuraava täydellisempi ratkaisu:

> Jos $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on jollain välillä Δ derivoituva funktio, niin y on annetun DY:n ratkaisu, jos ja vain jos se toteuttaa implisiittiratkaisun (ml. ehdon $x + 3y(x) + 2 \neq 0$) väleillä $\{x \in \Delta \mid x < 1\}$ ja $\{x \in \Delta \mid x > 1\}$ (missä jompi kumpi väleistä voi olla myös tyhjä).

- Katsotaan vielä kuvaa. Seuraavassa kuvassa on implisiittiratkaisun toteuttavia pisteitä vakion eri arvoilla. Pienin punainen kaari koostuu niistä (x, y), joilla $x < 1$ ja implisiittiratkaisu toteutuu vakiolla -4π. Pienin sininen kaari on muuten sama, mutta $x > 1$. Suuremmilla kaarilla on suurempi vakio. Vakiot kasvavat π:n välein vakioon 4π saakka. Harmaat suorat ovat $x + 3y + 2 = 0$ ja $-3x + y + 4 = 0$, ja suora $x = 1$ näkyy värien rajana. Vihreällä on merkitty eräs maksimaaliratkaisu, missä vakiona on vasemmalla $-\pi$ ja oikealla π.



- Pii tuli mukaan seuraavasta havainnosta: Oletetaan, että $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on DY:n ratkaisu ja $1 \in \Delta$. Jos $y(1) > -1$, niin $\lim_{x \to 1-} \frac{y(x)+1}{x-1} = -\infty$ ja vasemman puolen vakioksi saadaan

$$\begin{aligned} C_- &= \lim_{x \to 1-} C_- = \lim_{x \to 1-} \left(2 \arctan \frac{y(x)+1}{x-1} + 3 \ln \left((x-1)^2 + (y(x)+1)^2 \right) \right) \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 3 \ln \left((1-1)^2 + (y(1)+1)^2 \right) \\ &= -\pi + 3 \ln (y(1)+1)^2. \end{aligned}$$

Vastaavasti oikealle puolelle tulee

$$C_+ = \pi + 3 \ln (y(1)+1)^2 = C_- + 2\pi.$$

Jos $y(1) < -1$, niin vakiot menevät toisin päin. Vakiot ovat siis joka tapauksessa eri puolilla ykköstä 2π:n päässä toisistaan, mikä näkyy myös kuvasta: tällaiset (ja vain tällaiset) kaaret voidaan sulavasti (derivoituvasti) liittää toisiinsa pisteessä $x = 1$. Tämän väitteen täsmällinen todistaminen ei ole mahdottoman vaikeaa, mutta sivuutetaan. Silloin saadaan tulos, että jos meillä on kaksi ratkaisua, joista toisen kuvaaja on punaisen kaaren osa ja toisen sinisen kaaren osa ja jotka kohtaavat pisteessä $x = 1$, niin ne voidaan liimata yhdeksi ratkaisuksi.

- Kuvan perusteella maksimaalisen ratkaisun määrittelyväli on rajoitettu ja sen kuvaaja törmää suoraan $x + 3y + 2 = 0$ välin päätepisteissä. Tämä voidaan todistaa poistumislauseen avulla: jos $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on maksimaalinen ratkaisu, joka *ei* poistu tälle suoralle jommassa kummassa päässä, niin joko Δ on rajoittamaton tai y on rajoittamaton. Mutta kummassakin tapauksessa

$$(x-1)^2 + (y(x)+1)^2 \to \infty,$$

  mikä on mahdotonta, koska implisiittiratkaisun vasemman puolen on pysyttävä vakiona (huomaa, että arctan on rajoitettu funktio). Yhdistämällä tämä edelliseen voidaan maksimaaliset määrittelyvälit ratkaista implisiittiratkaisusta.

- Kuvan perusteella voi myös arvata, että jokainen DY:n maksimaaliratkaisu leikkaa suoran $-3x+y+4 = 0$ (ja myös suoran $x = 1$). Lisäksi kuvasta saa idean todistukseen: Jos esimerkiksi y on ratkaisu alueessa $\{x + 3y + 2 > 0\}$ suoran $-3x+y+4 = 0$ vasemmalla puolella, niin se on kasvava. Koska maksimaalisen ratkaisun on laskeuduttava takaisin suoralle $x + 3y + 2 = 0$, niin y voidaan jatkaa ainakin suoraan $-3x + y + 4 = 0$ saakka. Toinen mahdollisuus olisi ratkaista maksimaaliset ratkaisuvälit ja edetä sitä kautta. Se, toimivatko nämä ideat oikeasti, jätetään lukijan mietittäväksi.