**Diff.yht. I, harj. 4, 30.9.–2.10.2014, ratk. (Jouni Luukkainen)**

**Huom.** Muotoa $\dot{x}(t) = f(x(t))$ oleva yhtälö, jonka määrittelevä funktio $f$ ei siis riipu $t$:stä, on *autonominen.* Silloin, jos $x$ on välillä $\Delta \ni t_0$ määritelty ratkaisu, myös välillä $\Delta^* = \Delta - t_0 \ni 0$ määritelty funktio $x^*(t) = x(t+t_0)$, jolle $x^*(0) = x(t_0)$, on ratkaisu, sillä $\dot{x}^*(t) = \dot{x}(t+t_0) \cdot 1 = f(x(t+t_0)) = f(x^*(t))\ \forall t \in \Delta^*$. Ajan alkuhetki voidaan siis kiinnittää mielivaltaisesti, mikä on tärkeää sovelluksissa.

**Teht. 1.** *Eräs bakteerikanta mallinnetaan eksponentiaalisella kasvumallilla. Oletetaan, että alussa bakteeripopulaation massa on* 2 mg *ja yhden viikon kuluttua* 100 g.

**(a)** *Selvitä mallin Malthusin parametrin arvo yksikköineen.*

**(b)** *Milloin kanta on kymmentuhatkertaistunut alkuperäisestä?*

**Ratk. (a)** Käytetään ajan yksikkönä vuorokautta d ja massan yksikkönä grammaa g. Matematiikassa suureet esitetään yleensä laaduttomina, mutta vaihtelun vuoksi tässä tehtävässä laadullisina. Olkoon $N(t)$ populaation massa hetkellä $t \geq 0$. Merkitään $N_0 = N(0)$. Eksponentiaalisen kasvun malli populaation massalle on alkuarvotehtävä

$$\dot{N}(t) = rN(t), \qquad N(0) = N_0,$$

jossa $r > 0$ on mallin Malthusin parametri. Mallin ratkaisu on $N(t) = N_0 e^{rt}\ \forall t \geq 0$. Nyt $N_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ g ja $N(7\text{ d}) = 100$ g. Siis

$$\frac{N(7\text{ d})}{N_0} = \frac{100\text{ g}}{2 \cdot 10^{-3}\text{ g}} = 50000 \qquad \text{ja} \qquad \frac{N(7\text{ d})}{N_0} = e^{r7\text{ d}},$$

joten

$$e^{r7\text{ d}} = 50000 \iff r = \frac{\ln 50000}{7}\,\frac{1}{\text{d}} = \underline{1,546\text{ d}^{-1}}.$$

**(b)** $N(t) = 10000N_0 \iff e^{rt} = 10000 \iff t = \dfrac{\ln 10000}{r} = \underline{5,96\text{ d}}$. (Merkitsevien numeroiden määrää ei kannata niin pohtia.)

**Teht. 2.** *Ratkaise AAT*

$$\dot{x} + 4x = 4t\sqrt{x}, \qquad x(0) = 1/4.$$

*Lyhyesti, onko ratkaisu määritelty koko* $\mathbb{R}$*:ssä?*

Ohje. *Tarvinnet osittaisintegrointia.*

**Ratk.** Kyseinen DY on *Bernoullin yhtälö*. Sillä on triviaaliratkaisu $x(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Alkuehdon $x(0) = 1/4 > 0$ tähden etsitään (aluksi) vain positiiviset ratkaisut. Jakamalla yhtälö puolittain funktiolla $\sqrt{x} = x^{1/2}$ saadaan yhtälö

$$x^{-1/2}\dot{x} + 4x^{1/2} = 4t,$$

josta sijoituksella $z(t) = x(t)^{1/2}\ (> 0) \iff x(t) = z(t)^2$, jolle on $\dot{z} = (1/2)x^{-1/2}\dot{x}$, tulee *lineaarinen* yhtälö $2\dot{z} + 4z = 4t \iff \dot{z} + 2z = 2t$. Tällä on integroiva tekijä $\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$, joten osittaisintegroimalla saadaan

$$\dot{z} + 2z = 2t \iff e^{2t}z = \int 2te^{2t}\,dt = te^{2t} - \int e^{2t}\,dt = te^{2t} - \tfrac{1}{2}e^{2t} + C \ \ (C \in \mathbb{R}) \iff z(t) = t - \tfrac{1}{2} + Ce^{-2t}.$$

Lineaarinen yhtälö voidaan ratkaista **toisellakin tapaa**: Vastaavan HY:n $\dot{z} + 2z = 0$ yleinen ratkaisu on $z(t) = Ce^{-\int 2\,dt} = Ce^{-2t}$. Koska $z$:n kerroin on vakio eikä epähomogeenisuustermi $2t$ ole HY:n ratkaisu, voidaan arvata, että täydellä yhtälöllä on muotoa $z_1(t) = At + B$ oleva yksittäisratkaisu, jonka kertoimet saadaan silloin sijoittamalla yrite yhtälöön:

$$\dot{z}_1 + 2z_1 = 2t \iff A + 2At + 2B = 2t \iff A = 1,\ B = -\tfrac{1}{2} \iff z_1(t) = t - \tfrac{1}{2}.$$

Laskemalla yhteen saadaan täyden yhtälön yleinen ratkaisu $z(t) = t - \frac{1}{2} + Ce^{-2t}$.

Sovitetaan **heti** alkuehto:

$$x(0) = \tfrac{1}{4} \iff z(0) = \tfrac{1}{2} \iff \tfrac{1}{2} = 0 - \tfrac{1}{2} + C \iff C = 1 \iff z(t) = t - \tfrac{1}{2} + e^{-2t}.$$

Nyt $\dot{z}(t) = 1 - 2e^{-2t}$. Siis $\dot{z}$ on aidosti kasvava, ja $\dot{z}(t) = 0 \iff t = t_0 = \frac{1}{2}\ln 2$, joten $\dot{z}(t) < 0$, kun $t < t_0$, ja $\dot{z}(t) > 0$, kun $t > t_0$. Näin ollen $z(t) \geq z(t_0) = t_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t_0 = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Täten $x(t) = z(t)^2 = \underline{\left(t - \frac{1}{2} + e^{-2t}\right)^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Ratkaisu on siis määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

**Teht. 3.** 1000 *asukkaan kylässä havaitaan vaarallista sorsainfluenssaa, jonka kestoparametriksi* $\alpha$ *arvioidaan* $0,60$ vrk$^{-1}$ *ja tarttumisintensiteetiksi* $\beta = 10^{-3}$ vrk$^{-1}$. *Tarkastelujaksossa kukaan ei ehdi kuolla eikä uusia asukkaita synny — tautitilannetta mallinnetaan* SIS*-mallilla.*

**(a)** *Kirjoita mallin DY-pari ja siitä eliminoinnilla saatava logistinen yhtälö.*

**(b)** *Ratkaise kyseinen yhtälö Bernoullin tyyppinä ja osoita ratkaisun avulla sairaiden määrän vain kasvavan (syntyy siis epidemia), kun heitä aluksi oli vain* 10.

**(c)** *Kuinka näet kasvun suoraan?*

**Ratk. (a)** SIS-malliin sisältyy oletus, että taudille ei tule immuuniksi. Olkoon $S(t)$ terveiden (siis koskaan sairastumattomien tai taudista parantuneiden) ja täten taudille (uudestaan) alttiiden (*susceptible*) lukumäärä sekä $I(t)$ tautia sairastavien (*infected*) lukumäärä hetkellä $t \geq 0$. Taudista parannutaan vauhdilla $\alpha I(t)$, sillä vauhti on verrannollinen sairastavien määrään ja yhden sairastavan parantumisnopeuteen, joka taas on sidoksissa SIS-mallin olettamaan sairauden keston eksponentiaaliseen jakaumaan, ja tautiin sairastutaan vauhdilla $\beta S(t)I(t)$, sillä vauhti on verrannollinen terveiden ja sairaiden välisten kontaktien määrään ja tarttumisintensiteettiin yksittäisessä kontaktissa. Siis SIS-mallin DY-pari on

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) + \alpha I(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \end{cases}.$$

Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $(S(t) + I(t))^{\cdot} = \dot{S}(t) + \dot{I}(t) = 0$, joten $S(t) + I(t) = N\ \forall t \geq 0$ on vakio; tässä tehtävässä siis $N = 1000$. Eliminoimalla $S = N - I$ yhtälöryhmä palautuu skalaariyhtälöksi

$$\dot{I}(t) = \beta I(t)\left(N - I(t) - \frac{\alpha}{\beta}\right) \iff \dot{I}(t) = rI(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right),$$

kun merkitään $K = N - \alpha/\beta$ ja $r = \beta(N - \alpha/\beta)$. Näin saatiin logistinen yhtälö.

**(b)** Nyt $K = N - \alpha/\beta = 1000 - 0,60/10^{-3} = 1000 - 600 = 400$ ja $r = \beta K = 10^{-3} \cdot 400$ vrk$^{-1} = 0,4$ vrk$^{-1}$. Siis $K > 0$ ja $r > 0$. (Havaitaan vielä, että $R_0 = (\beta/\alpha)N = (10^{-3}/0,6) \cdot 1000 = 1,67$, joten $R_0 > 1$; kääntäenhän on $K = N(1 - 1/R_0)$.) Ratkaistaan logistinen yhtälö Bernoullin yhtälönä (se on myös separoituva):

$$\begin{aligned}
\dot{I} = rI\left(1 - \frac{I}{K}\right) &\iff \dot{I} - rI = -\frac{r}{K}I^2 \iff I \equiv 0 \quad \text{(hylättävä)} \quad \text{tai} \quad I^{-2}\dot{I} - rI^{-1} = -\frac{r}{K} \\
&\iff \text{(sijoitetaan } x(t) = I(t)^{-1}\text{, jolloin } \dot{x} = -I^{-2}\dot{I}) \quad -\dot{x} - rx = -\frac{r}{K} \iff \dot{x} + rx = \frac{r}{K} \\
&\iff \text{(integroiva tekijä } \mu(t) = e^{rt}) \quad \frac{d}{dt}(e^{rt}x(t)) = e^{rt}\dot{x}(t) + re^{rt}x(t) = \frac{r}{K}e^{rt} \\
&\iff e^{rt}x(t) = \frac{1}{K}e^{rt} + C \iff x(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-rt} \iff I(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}.
\end{aligned}$$

Merkitään $I_0 = I(0) = 10$, jolloin $0 < I_0 < K < N$; nyt $CK = K/I_0 - 1 = 400/10 - 1 = 40 - 1 = 39$ ja siis

$$I(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{I_0} - 1\right)e^{-rt}} = \frac{400}{1 + 39e^{-0,4(t/\text{vrk})}}.$$

Nähdään, että $I$ on aidosti kasvava (ja $\lim_{t\to\infty} I(t) = K = 400$).

**(c)** Funktion $I$ kasvu voidaan päätellä myös tarkastelemalla logistista yhtälöä $\dot{I} = rI(1-I/K)$ separoituvana, sillä nyt nähdään, että yhtälöllä on triviaaliratkaisut eli tasapainoratkaisut $I \equiv 0$ ja $I \equiv K$, jolloin alkuehdon $0 < I(0) = I_0 < K$ nojalla on $0 < I < K$ maksimaalisella ratkaisuvälillä, joka poistumislauseen mukaan on koko $[0, \infty[$; täten $\dot{I}(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$.

**Vielä nopeammin:** Koska $I_0 = 10 < 400 = K$, niin logistisesta mallista luennoilla osoitetun nojalla tiedetään, että $I$ kasvaa aidosti arvosta 10 kohden arvoa 400.

**TEHTÄVÄT 4 ja 5 KÄSITELLÄÄN ALLA LAAJEMMIN KUIN PYYDETYSTI, MUTTA OHJEIDENKIN MUKAISET RATKAISUT SIELTÄ LÖYTYVÄT.**

**Teht. 4.** *Tarkastellaan tartuntatautien* SIR-*mallia, tarkemmin sen paria* (2.16),

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\alpha R_0 s(t)i(t),$$
$$\frac{di}{dt}(t) = \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t).$$

*Oletetaan, että* $0 < s(0), i(0) < 1$. *Osoita, että* $i(t), s(t) > 0$ *kaikilla* $t$ *(joilla olemassa).*

**Ohje.** *Olivatpa ratkaisufunktiot* $i(t)$ *ja* $s(t)$ *mitä hyvänsä, voit kiinnittää ne vuorollaan ja soveltaa OY-lausetta* 1.2 *erikseen parin* (2.16) *yhtälöihin.*

**Huom. 1.** Yhtälöissä $\alpha$ ja $R_0$ ovat positiivisia vakioita (ja $R_0 > 1$). Ehdot $s(0) < 1$ ja $i(0) < 1$ on korvattava niitä vahvemmalla ehdolla $s(0) + i(0) \leq 1$, jotta oltaisiin SIR-mallissa ($s$ on terveinä pysyneiden ja siis taudille alttiiden suhteellinen osuus sekä $i$ tautia kantavien suhteellinen osuus vakiokokoisena säilyvästä populaatiosta; $r = 1 - s - i$ on taudin sairastaneiden ja siksi immuniteetin saaneiden suhteellinen osuus).

**Huom. 2.** OY-lause 1.2 ja vielä paremmin lineaarisen yhtälön ratkaisukaava todellakin riittävät tiettyyn mittaan asti, kuten osoitetaan. Mutta nämä eivät riitä AAT:n yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon osoittamiseen ja maksimaalisen ratkaisuvälin määrittämiseen, ja siksi aluksi ylimääräisenä asiana perustellaan nämä tehtävänannon yli menevät seikat.

**Yli tehtävänannon: Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys DY-ryhmien teoriaa käyttäen.** Seuraavassa käytetään DY-ryhmien OY-lausetta poistumislause siihen mukaanlukien ([Martio–Sarvas, *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, lause VII.3.3 ja lauseen II.7.22 analogia] tai [Walter, *Ordinary differential equations*, Springer 1998, Existence and Uniqueness Theorem (s. 108)]; ks. myös luentomateriaalin lause 5.3 ja sen todistuksen jälkeinen kappale). Nämä tulokset ovat vektorimuotoon kootulle AAT:lle $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, todistuksineen kuten lause 1.2 yhden skalaariyhtälön tapauksessa; jälleen poistuminen tarkoittaa, että $(t, \mathbf{x}(t)) \to$ reuna.

Nyt SIR-mallin DY-parin määrittelevät funktiot $f\colon (t, s, i) \mapsto -\alpha R_0 si$ ja $g\colon (t, s, i) \mapsto \alpha R_0 si - \alpha i$ ovat jatkuvia $\mathbb{R}^3$:ssa ja niillä on jatkuvat osittaisderivaatat $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial i$, $\partial g/\partial s$ ja $\partial g/\partial i$, joten OY- ja poistumislauseiden mukaan kullakin $(t_0, s_0, i_0) \in \mathbb{R}^3$ parin alkuarvotehtävällä $s(t_0) = s_0$ ja $i(t_0) = i_0$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $(s, i)\colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ maksimaalisella välillä $]a, b[$ $(-\infty \leq a < t_0 < b \leq \infty)$, ja $\sqrt{t^2 + s(t)^2 + i(t)^2} \to \infty$, kun $t \to a+$ tai $t \to b-$. Täten, jos ratkaisufunktiot $s$ ja $i$ ovat rajoitettuja välillä $[t_0, b[$, niin $b = \infty$. Jatketaan tästä alempana tehtävän tilanteessa.

**Tehtävän tilanne.** Olkoon nyt $t_0 = 0$, $s_0 > 0$, $i_0 > 0$ ja $s_0 + i_0 \leq 1$. Tutkitaan ratkaisuja $s$ ja $i$ välillä $\Delta = [0, b[$.

**Positiivisuus lineaaristen yhtälöiden teorialla (ohjeelle vaihtoehtoinen tapa).** Huomataan, että mallin yhtälöt $(ds/dt)(t) = -\alpha R_0 i(t)s(t)$ funktiolle $s$ ja $(di/dt)(t) = \alpha(R_0 s(t) - 1)i(t)$ funktiolle $i$ ovat lineaarisia ja homogeenisia jatkuvin kerroinfunktioin, joten ratkaisemalla ne alkuehdoin $s(0) = s_0$ ja $i(0) = i_0$ vaikkapa integroivaa tekijää käyttämällä saadaan, että

$$s(t) = s_0 e^{-\alpha R_0 \int_0^t i(\tau)\, d\tau} \quad \forall t \in \Delta \qquad \text{ja} \qquad i(t) = i_0 e^{\alpha \int_0^t (R_0 s(\tau) - 1)\, d\tau} \quad \forall t \in \Delta.$$

Tästä seuraa, että $s(t) > 0$ ja $i(t) > 0$ $\forall t \in \Delta$.

**Yli tehtävänannon: Ratkaisuväli on koko** $[0, \infty[$. Nyt $(d(s + i)/dt)(t) = (ds/dt)(t) + (di/dt)(t) = -\alpha i(t) < 0$ $\forall t \in \Delta$, joten välillä $\Delta$ funktio $s + i$ on aidosti vähenevä ja siis $s(t) + i(t) \leq s_0 + i_0 \leq 1$ $\forall t \in \Delta$. Täten $0 < s < 1$ ja $0 < i < 1$ välillä $\Delta$. Näin ollen $b = \infty$.

**Positiivisuus ohjeen mukaisella tavalla.** OY-lausetta 1.2 ei enää tarvittaisi, mutta ohjeen mukaisesti voisi menetellä seuraavasti. Olkoon $(s,i)$ ratkaisupari välillä $\Delta = [0,b[$ (ei oleteta, että $b=\infty$) ja $s(0)>0$ sekä $i(0)>0$. Olkoon $\Delta^* = ]0,b[$, $D = \Delta^* \times \mathbb{R}$ ja $f(t,x) = -\alpha R_0 i(t)x$, kun $(t,x) \in D$. Tällöin $f$ on jatkuva ja sillä on jatkuva osittaisderivaatta $(\partial f/\partial x)(t,x) = -\alpha R_0 i(t)$ alueessa $D$. Siis OY-lauseen oletukset pätevät yhtälölle $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$ alueessa $D$. Yhtälöllä on ratkaisu $x = s|\Delta^*$. Mutta yhtälöllä on myös triviaaliratkaisu $x(t) = 0\ \forall t \in \Delta^*$. Täten, jos $s(t) = 0$ jollain $t \in \Delta^*$, niin $s(t) = 0$ kaikilla $t \in \Delta^*$, jolloin $s$:n jatkuvuuden nojalla on myös $s(0) = 0$, mikä on vastoin oletusta $s(0) > 0$. Saadaan siis, että $s(t) > 0$ kaikilla $t \in \Delta$. Samalla tavalla käyttämällä DY:n määrittelevää funktiota $g(t,x) = \alpha(R_0 s(t) - 1)x$ alueessa $D$ voidaan osoittaa, että $i(t) > 0$ kaikilla $t \in \Delta$.

**Teht. 5.** *Jatkoa tehtävälle 4: Voit pitää tunnettuna, että parin ratkaisu on olemassa välillä* $[0,\infty[$ *(seuraa systeemin Poistumislauseesta)* [**osoitettu ylimääräisenä tehtävän 4 ratkaisussa yllä**]. *Osoita, että*

$$\textbf{(a)} \qquad \exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0, \qquad \textbf{(b)} \qquad \exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = 0.$$

**Ohje.** *Sovella tehtävän* 4 *tulosta ja yhtälöä* (2.18)*, lopuksi lemma* 2.1*.*

**Ratk.** Välillä $\Delta = [0,\infty[$ on $s > 0$ ja $i > 0$ tehtävän 4 mukaan ja täten $ds/dt = -\alpha R_0 si < 0$, joten $s$ on aidosti vähenevä, ja on siis olemassa raja-arvo $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) \geq 0$. Alla osoitetaan, että ei voi olla $s_\infty = 0$.

**Ohjeelle vaihtoehtoinen tapa osoittaa, että $\exists i_\infty = 0$.** Tehtävän 4 ratkaisussa nähtiin, että $s+i$ on vähenevä välillä $\Delta$, joten on olemassa raja-arvo $(s+i)_\infty = \lim_{t\to\infty}(s+i)(t) \geq 0$. Koska $i(t) = (s+i)(t) - s(t)$ $\forall t \in \Delta$, niin täten on olemassa myös raja-arvo $0 \leq i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = (s+i)_\infty - s_\infty$. Tällöin on edelleen olemassa raja-arvo $(d(s+i)/dt)_\infty = \lim_{t\to\infty}(d(s+i)/dt)(t) = -\alpha i_\infty$. Koska $s+i$ on rajoitettu ($0 < s+i \leq 1$ ja jopa $\exists (s+i)_\infty$), niin lemman 2.1 tähden on $(d(s+i)/dt)_\infty = 0$. Täten $i_\infty = 0$.

**Ajan eliminointi (kuten luennoissa).** Aidosti vähenevällä, jatkuvalla bijektiolla $t \mapsto s(t)$, $[0,\infty[ \to ]s_\infty, s_0]$, on aidosti vähenevä käänteiskuvaus $s \mapsto t(s)$, jolla on derivaatta $dt/ds = 1/(ds/dt)$. Täten $i(t)$:ssä voidaan aika $t$ eliminoida $s$:n avulla. Merkitään $i^*$:llä näin saatua yhdistettyä funktiota $s \mapsto t(s) \mapsto i(t(s))$ välillä $]s_\infty, s_0]$, jolloin $i^*(s_0) = i_0$. Ketjusäännön mukaan $i^*$:llä on derivaatta

$$\frac{di^*}{ds} = \frac{di}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{di/dt}{ds/dt} = \frac{\alpha R_0 si - \alpha i}{-\alpha R_0 si} = -1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{s}.$$

Integroimalla tämä saadaan (**luentojen tulos**), että

$$\text{(2.18)\&(2.19)} \qquad i^*(s) = i_0 + \int_{s_0}^{s} \left(-1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{\sigma}\right) d\sigma = i_0 + s_0 - s + \frac{1}{R_0}\ln\frac{s}{s_0}, \quad \text{kun } s_\infty < s \leq s_0.$$

Tästä seuraa, että $s_\infty > 0$, sillä jos olisi $s_\infty = 0$, saataisiin, että $0 < i^*(s) \to -\infty$, kun $s \to s_\infty$, mikä olisi ristiriita.

Nyt tästäkin nähdään (**ohjeen mukaisesti**), että on olemassa raja-arvo

$$i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{s\to s_\infty} i^*(s) = i_0 + s_0 - s_\infty + \frac{1}{R_0}\ln\frac{s_\infty}{s_0}.$$

Osoitetaan uudestaan (**ohjeen mukaisella tavalla**), että $i_\infty = 0$. Aiemman nojalla on olemassa raja-arvo

$$(ds/dt)_\infty = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{ds}{dt}\right)(t) = -\alpha R_0 s_\infty i_\infty,$$

joten, koska $s$ on rajoitettu välillä $\Delta$ (jopa $\exists \lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \in \mathbb{R}$), niin $(ds/dt)_\infty = 0$ lemman 2.1 tähden. Koska $s_\infty > 0$, yhtälöstä $-\alpha R_0 s_\infty i_\infty = 0$ seuraa sitten, että $i_\infty = 0$.

**Teht. 6.** *Ratkaise, vähintään implisiittisesti, differentiaaliyhtälöt*

$$\textbf{(a)} \quad y' = (x-y+1)^2, \qquad x^3 - xy^2y' + y^3 = 0.$$

**Ratk. (a)** Tehdään **sijoitus** $z(x) = x - y(x) + 1 \iff y(x) = x - z(x) + 1$, jolloin $y' = 1 - z'$. Saadaan yhtäpitävä separoituva yhtälö:

$$y' = (x - y + 1)^2 \iff 1 - z' = z^2 \iff z' = 1 - z^2.$$

Tällä on triviaaliratkaisut $z = \pm 1$. Sen muut ratkaisut saadaan separoimalla:

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \int dx \iff x + C_0 = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| \iff \frac{1+z}{1-z} = Ce^{2x} \quad (C \neq 0)$$
$$\iff z = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}.$$

**Takaisinsijoittamalla** saadaan alkuperäisen yhtälön ratkaisuiksi $y(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $y(x) = x + 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ sekä $y(x) = x + \dfrac{2}{1 + Ce^{2x}}$ $(C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, kun $x \neq \frac{1}{2}\ln(-1/C)$ tapauksessa $C < 0$. (Saadut erikoisratkaisut vastaavat raja-arvoja $C \to \pm\infty$ ja $C \to 0$.)

**Huom.** Vaihtoehtoinen sijoitus on $z(x) = x - y(x)$.

**(b)** Yhtälössä on $y = 0 \iff x = 0$. Olkoon $x \neq 0 \neq y$. Tällöin

$$x^3 - xy^2y' + y^3 = 0 \iff y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \iff y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}.$$

Saatiin tasa-asteinen yhtälö. Sijoituksella $z(x) = y(x)/x \iff y(x) = xz(x)$, jolloin $y' = xz' + z$, saadaan yhtäpitävä separoituva yhtälö, jonka ratkaisuun tehdään takaisinsijoitus:

$$y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \iff xz' + z = \frac{1}{z^2} + z \iff xz' = \frac{1}{z^2} \iff \int z^2\,dz = \int \frac{dx}{x}$$
$$\iff \tfrac{1}{3}z^3 = \ln|x| + C, \quad 0 \neq x \neq \pm e^{-C} \quad (C \in \mathbb{R})$$
$$\iff z(x) = \sqrt[3]{3(\ln|x| + C)} \iff y(x) = x\sqrt[3]{3(\ln|x| + C)}, \quad 0 \neq x \neq \pm e^{-C} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Näitä ratkaisuita ei voi jatkaa derivoituviksi poissuljettuihin pisteisiin, jolloin ne eivät voi myöskään saada arvoa 0.

**Huom.** Yhtälöllä on kyllä integroiva tekijä $1/x^4$ ja yhtälö on myös saatettavissa Bernoullin yhtälöksi, mutta kumpaa tahansa kautta eteneminen ei opettaisi uutta.