Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 3. ratkaisuehdotelmia, 29.9.2014
Valter Pohjola

Ratkaisu 1. Pitää siis ratkaista yhtälö

$$2xy + (2y^2 + x^2)y' = 0.$$

Merkitään $M(x,y) := 2xy$ ja $N(x,y) := 2y^2 + x^2$. Sovelletaan eksaktin yhtälön ratkaisu menetelmää (katso moniste sivut 13–14), eli etsitään potentiaalifunktio F, jolle pätee $\partial_x F = M$ ja $\partial_y F = N$.

1) Yhtälö on eksakti koko $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä ehto

$$\partial_y M(x,y) = 2x = \partial_x N(x,y),$$

pätee kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (katso Lause 1.10).

2) Potentiaalille F pätee määritelmän nojalla ehto $\partial_x F = M$. Tämän ehdon toteuttaa mikä tahansa F, joka on muotoa

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) \\ &= \int 2xy\,dx + g(y) \qquad (1) \\ &= x^2 y + g(y), \end{aligned}$$

jossa g on toistaiseksi tuntematon.

3) Potentiaalille F pätee myös, että $\partial_y F = N$. Tämän ja yhtälön (1) nojalla

$$x^2 + g'(y) = 2y^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g'(y) = 2y^2.$$

Ratkaistaan g integroimalla:

$$g(y) = \int^y g'(t)\,dt = \int^y 2t^2\,dt = \frac{2}{3}y^3.$$

4) Me olemme nyt löytäneet potentiaalifunktion $F(x,y) = x^2y + \frac{2}{3}y^3$. Potentiaalifunktion idea on se, että ketjusäännön (vektorianalyysi) ja sen, että $\partial_x F = M$ ja $\partial_y F = N$, avulla saadaan, että

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0.$$

Integroimalla tämä saadaan implisiittiratkaisu $F(x,y) = C$. Se on nyt siis

$$x^2y + \frac{2}{3}y^3 = C.$$

Ratkaisu 2. Etsitään ensin integroiva tekijä yhtälölle

$$(x - y^2/2) + xyy' = 0. \tag{2}$$

Merkitään $M(x,y) := x - y^2/2$ ja $N(x,y) := xy$. Sovelletaan Lausetta 1.11. Tarkastellaan siis lauseketta

$$\frac{1}{N}\Big(\partial_y M - \partial_x N\Big) = \frac{1}{xy}(-y-y) = -\frac{2}{x} =: h(x).$$

Lause 1.11 antaa nyt integroivan tekijän

$$\mu(x) = \exp\Big(\int h(s)ds\Big) = \exp\Big(\int -\frac{2}{s}ds\Big) = \exp(-2\ln|x| + C_0) = C|x|^{-2} = Cx^{-2},$$

kun $x \neq 0$; valitaan $C = 1$.

Kertomalla alkuperäinen yhtälö (2) tekijällä μ saadaan funktiolle y yhtäpitävä yhtälö, joka on eksakti. Tämä yhtälö on

$$\frac{1}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x}y' = 0. \tag{3}$$

Merkitään $\tilde{M}(x,y) := 1/x - y^2/(2x^2)$ ja $\tilde{N}(x,y) := y/x$.

Sovelletaan eksaktin yhtälön ratkaisumenetelmää. Eli käydään läpi lyhyesti samat vaiheet kuin tehtävässä 1 (katso moniste sivut 13–14). (Huom. argumentti tehdään nyt funktion $\tilde{N}$ suhteen.)

1) Lauseen 1.11 nojalla tiedetään jo, että yhtälö on eksakti.

2) Potentiaalille F pätee, että $\partial_y F = \tilde{N}$, joten se on muotoa

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \tilde{N}(x,y)\,dy + \tilde{h}(x) \\ &= \int \frac{y}{x}\,dy + \tilde{h}(x) \\ &= \frac{y^2}{2x} + \tilde{h}(x), \end{aligned}$$

jossa $\tilde{h}$ on toistaiseksi tuntematon.

3) Potentiaalille F pätee myös, että $\partial_x F = \tilde{M}$. Eli kohdan 2) nojalla

$$-\frac{y^2}{2x^2} + \tilde{h}'(x) = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{h}'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ratkaistaan $\tilde{h}$ integroimalla, jolloin saadaan

$$\tilde{h}(x) = \int^x \frac{1}{s} ds = \ln|x|.$$

4) Olemme löytäneet potentiaalin F. Implisiittiratkaisu $F(x,y) = C$ on siis

$$\frac{y^2}{2x} + \ln|x| = C,$$

kun $x \neq 0$. Eksplisiittinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\sqrt{2x(C - \ln x)}, \quad x \in]0, e^C[, \\ y(x) &= \pm\sqrt{2x(C - \ln|x|)}, \quad x \in]-\infty, -e^C[. \end{aligned}$$

Ratkaisu 3. (a) Sovelletaan monisteen esimerkin 2.1 ratkaisumenetelmää. Parametrit ovat tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} V_0 &= 16 \cdot 10 \cdot 3m^3 = 480 \times 10^3 l, \\ F_{in} &= F_{out} = 10^3 l/min, \\ a &= 1/100 kg/l. \end{aligned}$$

Suolan määrä saadaan monisteen kaavasta (2.3), joka on tässä tapauksessa antaa yhtälön, joka on muotoa

$$x'(t) = aF_{in} - \frac{F_{out}}{V_0 + (F_{in} - F_{out})t} x(t) = A - Bx(t),$$

jossa A ja B ovat vakiot

$$\begin{aligned} A &= aF_{in} = 10, \\ B &= \frac{F_{out}}{V_0} = \frac{10^3}{480 \times 10^3} = \frac{1}{480}. \end{aligned}$$

Tämä on lineaarinen yhtälö, jonka ratkaisu saadaan kuten monisteen esimerkissä 2.1. Ratkaisu on

$$x(t) = \frac{A}{B} + Ce^{-Bt}.$$

Selvitetään seuraavaksi vakion C arvo. Hetkellä $t = 0$ suolaa on 3 prosenttia. Eli

$$\frac{3}{100}V_0 = 14400kg,$$

Funktion x lauseke antaa siten yhtälön

$$x(0) = 4800 + C = 14400 \quad \Leftrightarrow \quad C = 9600.$$

Jos suolan pitoisuus on altaassa 2 prosenttia, niin tällöin on suolan määrä altaassa

$$\frac{2}{100}V_0 = 9600kg.$$

Ratkaistaan siis yhtälö $x(t) = 9600$, eli

$$4800 + 9600e^{-\frac{t}{480}} = 9600 \quad \Leftrightarrow \quad t = 480 \ln 2 \approx 333min.$$

(b) Monisteen yhtälö (2.3) on nyt muotoa

$$x'(t) = aF_{in} - \frac{F_{out}}{V_0 + (F_{in} - F_{out})t}x(t) = A - \frac{B}{C - 500t}x(t),$$

jossa vakiot A, B ja C ovat

$$\begin{aligned} A &= aF_{in} = 10, \\ B &= F_{out} = 1.5 \times 10^3, \\ C &= V_0 = 480 \times 10^3. \end{aligned}$$

Funktion x yhtälö on homogeeninen 1 kl. lineaarinen DY. Käyttämällä tämän muotoisen yhtälön ratkaisumenetelmää saadaan ratkaisu

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A(C - 500t)}{B - 500} + C'(C - 500t)^{B/500} \\ &= 4800 - 5t + C'(480 \times 10^3 - 500t)^3. \end{aligned}$$

Määritetään vakio C' alkuehdosta

$$14400 = x(0) = 4800 + C'(480 \times 10^3)^3 \quad \Leftrightarrow \quad C' = \frac{9600}{(480 \times 10^3)^3}.$$

Veden määrä ei ole enää vakio, niin kuin (a)-tapauksessa, vaan ajan funktio

$$v(t) = V_0 + (F_{in} - F_{out})t = 480 \times 10^3 - 500t.$$

Kahden prosentin suolapitoisuudelle saadaan nyt yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{2}{100} = \frac{x(t)}{V(t)} &= \frac{4800 - 5t + C'(480 \times 10^3 - 500t)^3}{480 \times 10^3 - 500t} \\ &= \frac{1}{100} + \frac{2}{100}\Big(1 - \frac{t}{960}\Big)^2.\end{aligned}$$

Ratkaisemalla t tästä saadaan likiarvo

$$t = 960\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \approx 281 min.$$

Ratkaisu 4. Merkitään $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ ja $(x_1, y_1) = (x_0 + x_0^2/k, 0)$. Tangentin kulmakertoimelle $\tilde{k}$ pisteessä (x_0, y_0) on lauseke

$$\tilde{k} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

(piirrä kuva). Käyrän $y(x)$ tangentin kulmakerroin on toisaalta sama kuin derivaatta. Saadaan siis DY

$$y'(x_0) = \tilde{k} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-y(x_0)}{x_0 + x_0^2/k - x_0} = -k\frac{y(x_0)}{x_0^2}.$$

On siis ratkaistava yhtälö

$$y' = \frac{-ky}{x^2}.$$

Tämä on separoituva yhtälö, jossa $p(x) = -k/x^2$ ja $q(y) = y$. Triviaaliratkaisu on $y(x) = 0$, kun $x \neq 0$. Tämä toteuttaa tehtävän ehdon ja on siten eräs tehtävän ratkaisu. Etsitään muut ratkaisut. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = \frac{-k}{x^2} &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-k}{x^2}\,dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y(x)| = \frac{k}{x} + C_0 \\ &\Leftrightarrow y(x) = Ce^{\frac{k}{x}}, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

ja $x \neq 0$.

(Huom. Jos on annettu jokin tietty piste $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, jonka kautta käyrän tulee kulkea, niin saadaan alkuarvo $y(a) = b$. Tämä kiinnittää vakion C, sillä $b = C\exp(k/a)$.

Huomaa myös, että ratkaisua ei saada muissa y-akselin pisteissä (eli alkuarvoille, jotka ovat muotoa $(0, b), b \neq 0$) kuin origossa eli kun $b = 0$. Tämä ei ole vastoin OY-lausetta, sillä yllä oleva funktio p ei ole määritelty, kun $x = 0$.)

Ratkaisu 5. (a) Ilmiötä hallitsee yhtälö

$$p' = rp\Big(1 - \frac{p}{K}\Big),$$

jossa $r = 0.1$. Yhtälö voidaan ratkaista Bernoullin yhtälönä. Tämä on tehty monisteen sivulla 27, jossa osoitetaan, että

$$p(t) = \frac{p_0 K}{p_0 + (K - p_0)e^{-0.1t}},$$

jossa $p_0 = p(0)$.
Kiinnitetään seuraavaksi parametrin K arvo. Aloitetaan ajanlasku vuodesta 1990, josta saadaan, että

$$p(0) = 10^4, \quad p(10) = 5 \times 10^3.$$

Koska $p(10) = 5 \times 10^3$, saadaan, että

$$\begin{aligned}\frac{10^4 K}{10^4 + (K - 10^4)e^{-1}} = 5 \times 10^3 \quad &\Leftrightarrow \quad 10^4 K = 5 \times 10^7 + 5 \times 10^3 K e^{-1} - 5 \times 10^7 e^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad K = 10^4 \frac{1 - e^{-1}}{2 - e^{-1}} \approx 3873.\end{aligned}$$

(b) Ennustetaan kalakanta vuonna 2010 laskemalla $p(20)$:

$$p(20) \approx \frac{10^4 \cdot 3873}{10^4 + (3873 - 10^4)e^{-2}} \approx 4223.$$

Ratkaisu 6. Derivaatta antaa funktioiden T_1 ja T_2 muutosnopeudet, joten saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} T_1' &= a(T_1 - T_2), \\ T_2' &= b(T_1 - T_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Merkitään $F := T_1 - T_2$. Tällöin
$$F' = (a-b)F,$$
Tämä on separoituva yhtälö. Ratkaisu on
$$F(t) = Ce^{(a-b)t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Yhtälöstä (4) seuraa nyt, että
$$T_1'(t) = aCe^{(a-b)t}.$$
Ratkaistaan tämä T_1:n suhteen, jolloin saadaan
$$T_1(t) = \frac{a}{a-b}Ce^{(a-b)t} + C'.$$
Funktio T_2 saadaan nyt seuraavasti:
$$\begin{aligned} T_2(t) &= T_1(t) - F(t) \\ &= \frac{a}{a-b}Ce^{(a-b)t} + C' - \frac{a-b}{a-b}Ce^{(a-b)t} \\ &= \frac{b}{a-b}Ce^{(a-b)t} + C'. \end{aligned}$$
Oletetaan lopuksi, että on annettu alkuehdot $T_1(0) = s_1$ ja $T_2(0) = s_2$. Nämä määräävät vakiot C ja C', sillä
$$\begin{aligned} s_1 = T_1(0) &= \frac{a}{a-b}C + C' \\ s_2 = T_2(0) &= \frac{b}{a-b}C + C', \end{aligned}$$
josta seuraa, että
$$\begin{aligned} C &= s_1 - s_2, \\ C' &= \frac{as_2 - bs_1}{a-b}. \end{aligned}$$