Differentiaaliyhtälöt I, syksy 2014
2. harjoitusten ratkaisut

Anna Haataja

Tehtävä 1. *Ratkaise differentiaaliyhtälöt (DY)*

$$(a)\ y' = 2x + y/x,\ \ (b)\ y' + (\cos x)y = \cos x.$$

Ratkaisu 1. (a)
Huomataan, että

$$y' = 2x + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 2x.$$

Yhtälö on lineaarinen, joten ratkaistaan se integroivan tekijän avulla, eli merkitään $p(x) = -1/x$ ja $q(x) = 2x$. Nyt funktio p ei ole määritelty, kun $x = 0$. Integroimme siis väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$. Positiivinen integroiva tekijä saadaan kaavasta

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int^x p(t)dt} = e^{\int^x -\frac{1}{t}dt}\\ &= e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|},\ x \neq 0.\end{aligned}$$

Luovutaan positiivisuusvaatimuksesta ja valitaan $\mu(x) = \frac{1}{x}$ molemmissa alueissa $x < 0$ ja $x > 0$. Ratkaisukaavaan sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)q(t)dt + c\right)\\ &= x\left(\int^x \frac{1}{t}2tdt + c\right)\\ &= x\left(\int^x 2dt + c\right)\\ &= cx + 2x^2,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b)
Tämäkin yhtälö on lineaarinen, joten vastaavasti nyt $p(x) = \cos x$ ja $q(x) = \cos x$. Molemmat funktiot ovat hyvin määriteltyjä ja jatkuvia koko reaalilukujen joukossa. Voimme siis soveltaa ratkaisumenetelmää ja etsiä integroivan tekijän

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)dt} = e^{\int^x \cos t dt} = e^{\sin x}.$$

Ratkaisukaavan avulla saamme

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)q(t)dt + c\right)\\
&= e^{-\sin x}\left(\int^x e^{\sin t}\cos t dt + c\right)\\
&= e^{-\sin x}\left(e^{\sin x} + c\right)\\
&= 1 + ce^{-\sin x},\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 2. *Ratkaise DY*

$$2y + 3 + (2x-1)y' = 0$$

(a) lineaarisena, (b) separoituvana yhtälönä.

Ratkaisu 2. (a)
Muokataan yhtälöä muotoon, josta näemme kerroinfunktiot suoraan:

$$2y + 3 + (2x-1)y' = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{2x-1}y = \frac{-3}{2x-1}.$$

Siis $p(x) = 2/(2x-1)$ ja $q(x) = -3/(2x-1)$, kun $x \neq 1/2$. Integroiva tekijä on

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int^x p(t)dt} = e^{\int^x \frac{2}{2t-1}dt}\\
&= e^{\ln|2x-1|} = |2x-1|,
\end{aligned}$$

josta valitsemme $\mu(x) = 2x - 1$. Varsinainen ratkaisu saadaan sijoittamalla ratkaisukaavaan:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)q(t)dt + c\right)\\
&= \frac{1}{2x-1}\left(\int^x (2t-1)\left(\frac{-3}{2t-1}\right)dt + c\right)\\
&= \frac{1}{2x-1}\left(\int^x -3dt + c\right)\\
&= \frac{1}{2x-1}(-3x + c)\\
&= \frac{c}{2x-1} - \frac{3x}{2x-1},\ x \neq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ehdosta $x \neq \frac{1}{2}$ voidaan luopua jos ja vain jos vakio $c = \frac{3}{2}$. Tällöin saamme alkuperäiselle yhtälölle ratkaisun $y(x) = -\frac{3}{2}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

(b)
Yhtälö on myös separoituva, sillä sen voi kirjoittaa muodossa

$$y' = \frac{-2y-3}{2x-1},$$

jolloin kerroinfunktiot ovat $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ ja $h(y) = -3-2y$. Vaadimme taas, että $x \neq 1/2$. Funktiolla h on nollakohta $y = -3/2$, josta saamme alkuperäisen yhtälön erikoisratkaisun $y(x) = -\frac{3}{2}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\begin{aligned}
\int^y \frac{dt}{h(t)} &= \int^x g(t)dt + c_0 \\
\int^y \frac{-1}{2t+3}dt &= \int^x \frac{1}{2t-1}dt + c_0 \\
-\frac{1}{2}\ln|2y+3| &= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c_0 \\
2y+3 &= \frac{c_1}{2x-1} \\
2y &= \frac{c_1 - 3(2x-1)}{2x-1} \\
y &= \frac{c}{2x-1} - \frac{3x}{2x-1}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 3. *Palauta seuraavista mahdolliset tavallisiksi differentiaaliyhtälöiksi ja tässä onnistuessasi ratkaise:*

$$(a)\ xy(x) + \int_0^{x^2} ty(t)dt = 1, \quad (b)\ xy(x) + \int_0^x ty(t)dt = 1$$

Ratkaisu 3. Tehtävän integraalit on tulkittava epäoleellisina alarajalla $x = 0$, sillä yhtälöt eivät toteudu, kun $x = 0$.
(a) Derivoidaan yhtälö puoliksi x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(xy(x) + \int_0^{x^2} ty(t)dt\right) &= 0 \\
y(x) + xy'(x) + 2x \cdot (ty(t)|_{t=x^2}) &= 0 \\
y(x) + xy'(x) + 2x^3y(x^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Tavallisessa differentiaaliyhtälössä sisäfunktioiden tulee olla samat, mutta tässä samanaikaisesti y:n sisäfunktioina esiintyvät x ja x^2 eivät täytä tätä ehtoa. Tämä yhtälö ei siis ole tavallinen differentiaaliyhtälö.

(b) Edetään samoin kuten edellisessä kohdassa. Derivoidaan puolittain x:n suhteen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(xy(x)+\int_0^x ty(t)dt\right)&=0\\ y(x)+xy'(x)+ty(t)|_{t=x}&=0\\ y(x)+xy'(x)+xy(x)&=0\\ y'(x)+\left(1+\frac{1}{x}\right)y(x)&=0,\ x\neq 0.\end{aligned}$$

Yhtälö voidaan siis saattaa haluttuun muotoon. Se on erityisesti lineaarinen, joten voimme soveltaa taas integroivan tekijän menetelmää kerroinfunktioina $p(x)=1+1/x$ ja $q(x)=0$:

$$\mu(x)=e^{\int^x p(t)dt}=e^{\int^x 1+1/tdt}=e^{x+\ln|x|}=|x|e^x.$$

Valitaan tämän sijaan $\mu(x)=xe^x$, $x\neq 0$. Ratkaisukaavasta saadaan

$$\begin{aligned}y(x)&=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)q(t)dt+c\right)\\ &=\frac{1}{x}e^{-x}\left(\int^x te^t\cdot 0dt+c\right)\\ &=\frac{c}{x}e^{-x},\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Kerroin c saadaan selville alkuperäisen integraaliyhtälön avulla:

$$\begin{aligned}xy(x)+\int_0^x ty(t)dt=1&\Leftrightarrow ce^{-x}+\int_0^x t\frac{c}{t}e^{-t}dt=1\\ &\Leftrightarrow ce^{-x}+\int_0^x ce^{-t}dt=1\\ &\Leftrightarrow ce^{-x}-c(e^{-x}-e^0)=1\\ &\Leftrightarrow ce^{-x}-ce^{-x}+c=1\\ &\Leftrightarrow c=1.\end{aligned}$$

Ratkaisuksi saamme siis $y(x)=\frac{1}{x}e^{-x}$.

Tehtävä 4. *Ratkaise DY*

$$(x-2)y'-y=2(x-3)^3$$

alkuehdoilla

$$(a)\ y(0)=0,\ (b)\ y(2)=0,\ (c)\ y(2)=1.$$

Miten ratkaisut voi ymmärtää OY-lauseen kannalta?

Ratkaisu 4. Muokkaamalla yhtälöä voimme nähdä, että se on lineaarinen:

$$(x-2)y' - y = 2(x-3)^3 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2, x \neq 2,$$

joten $p(x) = \frac{-1}{x-2}$ ja $q(x) = 2(x-2)^2$. Integroiva tekijä saadaan kaavasta

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)dt} = e^{\int^x \frac{-1}{t-2}dt} = e^{-\ln|x-2|} = \frac{1}{|x-2|}.$$

Valitaan molemmilla puolitasoilla $x < 2$ ja $x > 2$ tekijäksi $\frac{1}{x-2}$.
Seuraavaksi sijoitamme tekijän ratkaisukaavaan yhtälön yleistä ratkaisua varten:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)q(t)dt + c\right) \\ &= (x-2)\left(\int^x \frac{1}{t-2} \cdot 2(t-2)^2 dt + c\right) \\ &= (x-2)\left(\int^x 2(t-2)dt + c\right) \\ &= (x-2)\left(2(\frac{x^2}{2} - 2x) + c\right) \\ &= (x-2)^3 + c(x-2). \end{aligned}$$

Nyt voimme tarkastella varsinaisia alkuarvotehtäviä:
(a) $y(0) = 0$:
Vakio saa siis arvon

$$\begin{aligned} -2c = 0 &\Leftrightarrow c = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x) = x^3 - 6x^2 + 8x. \end{aligned}$$

OY-lauseen oletukset toteutuvat, joten saimme yksikäsitteisen ratkaisun. Erityisesti ratkaisu on polynomi, joten tehtävän aluksi asetettua ehtoa $x \neq 2$ ei enää tarvita.
(b) $y(2) = 0$:

$$y(2) = (2-2)^3 + c(2-2) = 0.$$

Vakiota ei voi kiinnittää, joten alkuarvotehtävän ratkaisuksi käyvät kaikki yleistä muotoa olevat funktiot. Yhtälön kerroinfunktio p ei ole määritelty pisteessä $x = 2$, joten OY-lauseen oletukset eivät ole voimassa.
(c) $y(2) = 1$:

Nyt kaikilla $c \in \mathbb{R}$ pätee

$$y(2) = 0 \neq 1,$$

joten alkuarvotehtävällä ei ole ratkaisua.
Huomio: Polynomille $f(x) = (x-2)^3 + c(x-2)$ pätee, että $f(2) = 0$ ja $f'(2) = (3(x-2)^2 + c)|_{x=2} = c$, joten DY:n jokainen ratkaisu voitiin yhdellä ja vain yhdellä tavalla jatkaa koko $\mathbb{R}$:ään.

Tehtävä 5. *Tarkastellaan DY:tä* $-2xy^2 + (1+2y)y' = 0$.

Ratkaisu 5. (a) Tehtävässä esitellyn integraalin ongelmana on muuttujan ja tuntemattoman funktion sekaantuminen; integraaleihin ei ole merkitty, minkä suhteen niitä integroidaan. Erityisesti tulisi muistaa, että funktio y riippuu x:stä, jolloin muuttujan suhteen integroitaessa y:tä ei voi käsittää vakiokertoimena. Erityisesti pieleen menee "osittaisintegrointi"$\int -2xy^2$, sillä integraalia ei voi jakaa muotoon $-y(x)^2 \int 2x dx - 2x \int y^2 dy$.
(b) Sovelletaan yhtälöön toimivaa ratkaisumenetelmää:

$$-2xy^2 + (1+2y)y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2xy^2}{1+2y}, y \neq -1/2.$$

Kerroinfunktiot ovat siis $g(x) = x$ ja $h(y) = \frac{2y^2}{1+2y}$. Funktion h nollakohdat ovat yhtälön erikoisratkaisuja, joten funktio $y = 0$ on koko $\mathbb{R}$:ssä eräs hakemistamme ratkaisuista. Muut ratkaisut saamme implisiittisessa muodossa integroimalla puolittain:

$$\begin{aligned}
\int^y \frac{dt}{h(t)} &= \int^x g(t)dt + c \\
\int^y \frac{1+2t}{2t^2} dt &= \int^x td + c \\
\int^y \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t}\right) dt &= \int^x td + c \\
-\frac{1}{2y} + \ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 6. *Osoita DY* $y^{-1} + (2y - xy^{-2})y' = 0$ *eksaktiksi ja ratkaise se. Muodosta käänteisfunktio eksplisiittisesti.*

Ratkaisu 6. Etsitään määritelmän mukaisesti jatkuvasti derivoituva funktio $u = u(x,y)$, jolle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N, \text{ kun } y \neq 0.$$

Huomataan, että funktio $u = y^2 + x/y$ täyttää määritelmän vaatimukset:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} = M \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} = N.$$

Kun $y \neq 0$, kerroinfunktiot ovat määriteltyjä ja jatkuvia. Siispä yhtälö toteuttaa eksaktin yhtälön kriteerit molemmissa puolitasoissa $\{x < 0\}$ ja $\{x > 0\}$ m.o.t.
Seuraavaksi ratkaistaan yhtälö funktion u avulla:

$$\begin{aligned}
y^{-1} + (2y - xy^{-2})y' &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{du}{y}y' &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y} + (2y - \frac{x}{y^2})y' &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y} + 2yy' - \frac{xy'}{y^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y^2 + \frac{x}{y}) &= 0 \\
\Leftrightarrow y^2 + \frac{x}{y} &= c, c \in \mathbb{R}, y \neq 0.
\end{aligned}$$

Tai lyhyemmin:

$$\begin{aligned}
y^{-1} + (2y - xy^{-2})y' &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{du}{dx}u(x, y(x)) &= 0 \\
\Leftrightarrow u(x, y(x)) = c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tämä on yhtälön implisiittinen ratkaisu. Vaikka eksplisiittinen ratkaisu ei ole tästä helposti ratkaistavissa, voimme kuitenkin selvittää ratkaisun käänteisfunktion lausekkeen eksplisiittisesti ja sen avulla mahdollisesti hahmotella varsinaisen ratkaisufunktion kuvaajaa. Käänteisfunktio saadaan implisiittisestä ratkaisusta y:n funktiona: $x(y) = cy - y^3$.