Differentiaaliyhtälöt I, syksy 2014
1. harjoitusten ratkaisut

Niko Ilomäki

10. syyskuuta 2014

1.

	yhtälö	tavallinen DY?	tuntematon funktio
(a)	$\ddot{x} = (\dot{x} - 2)^2 - tx$	on	$x = x(t)$
(b)	$xy + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = x^2$	on	$y = y(x)$
(c)	$xyz = \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy + yz$	ei ole (kahden muuttujan lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö)	$(z = z(x, y))$
(d)	$y'(x) = y(x+1)$	ei ole (ei esitettävissä muodossa $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$)	$(y = y(x))$
(e)	$x^2 \sin(y') + y^{(4)}/y = \cos x^3$	on	$y = y(x)$
(f)	$x \sin(\dot{x})/t = t/(\dot{x})$	on	$x = x(t)$

	yhtälö	kertaluku	normaalimuoto
(a)	$\ddot{x} = (\dot{x} - 2)^2 - tx$	2	on valmiiksi
(b)	$xy + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = x^2$	1	$y' = x - (\frac{1}{x} + 1)y$ oletuksella $x \neq 0$
(c)	$xyz = \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy + yz$	(1)	ei muutettavissa (lineaarisen osittaisdifferentiaaliyhtälön normaalimuoto $\frac{\partial z}{\partial y} = xyz + 2xy - yz$)
(d)	$y'(x) = y(x+1)$	(1)	ei muutettavissa
(e)	$x^2 \sin(y') + y^{(4)}/y = \cos x^3$	4	$y^{(4)} = -x^2 y \sin(y') + y \cos x^3$ oletuksella $y \neq 0$
(f)	$x \sin(\dot{x})/t = t/(\dot{x})$	1	ei muutettavissa

2. Derivoidaan kaikki funktiot kerran, ja lisäksi funktiot (b) ja (c) kahdesti. Sijoitetaan tulokset vastaavien yhtälöiden vasemmille puolille.

(a)

$$y = Ae^x$$

$$y' = Ae^x$$

$$\begin{aligned} y' - y &= Ae^x - Ae^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$y = e^{-x}(A \sin x + B \cos x)$$

$$y' = e^{-x}((-A - B) \sin x + (A - B) \cos x)$$

$$y'' = e^{-x}(2B \sin x - 2A \cos x)$$

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= e^{-x}(2B \sin x - 2A \cos x) + 2e^{-x}((-A - B) \sin x + (A - B) \cos x) + 2e^{-x}(A \sin x + B \cos x) \\ &= e^{-x}((2B - 2A - 2B + 2A) \sin x + (-2A + 2A - 2B + 2B) \cos x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$y = Ae^{x^2/2}$$

$$y' = Axe^{x^2/2}$$

$$y'' = A(x^2+1)e^{x^2/2}$$

$$\begin{aligned} y'' - xy' - y &= A(x^2+1)e^{x^2/2} - x(Axe^{x^2/2}) - Ae^{x^2/2} \\ &= Ae^{x^2/2}(x^2+1-x^2-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sijoituksilla kunkin yhtälön vasen puoli saa vakioarvon 0, joten funktiot (a), (b) ja (c) ovat ratkaisuja vastaaville yhtälöille.

3. Tiedetään, että

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x \geq 0,$$

joten

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|.$$

Toisaalta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x.$$

Alkuarvotehtävän toteutumisen kannalta todetaan vielä, että

$$\sin 0 = 0.$$

Funktio $\sin x$ on siis AAT:n ratkaisu nollan ympäristössä, ja nimenomaan sellaisella välillä, jolla kokonaisuudessaan pätee $\cos x = |\cos x|$. Koska $\cos\frac{-\pi}{2} = 0$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ sekä kosinin käyttäytyminen tunnetaan, saadaan maksimaaliseksi ratkaisuväliksi $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4. a) Lokaalin OY-lauseen ehdot pätevät koko tasossa ($f(x,y) = \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{2}x$ on jatkuvien funktioiden summana jatkuva, kuten myös $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos y$). Tehdään vastaoletus: on olemassa piste x_0, jolla $y(x_0) = z(x_0) = c$. Koska OY-lause pätee, AAT:lla $2y' + x - \sin y = 0, \quad y(x_0) = c$ on yksikäsitteinen ratkaisu. Siis y ja z ovat sama ratkaisu, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Alkuperäinen väite pätee. (Huomionarvoista on, että lokaalia OY-lausetta ei voi soveltaa tehtävään suoraan, sillä se koskee alkuarvotehtäviä, ei differentiaaliyhtälöitä.)

   b) Voi olla, sillä lokaalin OY-lauseen määrittelyssä annettu ehto "$\frac{\partial f}{\partial y}$ on jatkuva tason alueessa" ei päde; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ ei ole edes määritelty, kun $y = 1$, ja alkuarvotehtävä on annettu juuri tällä y:n arvolla. (Tehtävän voi ratkaista myös muilla argumenteilla, jotka kuitenkin enemmän tai vähemmän palautuvat samoihin seikkoihin. Helpoin esimerkki AAT:n kahdesta eri ratkaisusta (näitä siis ei kysytty) ovat $y \equiv 1$ ja $y = \sin x$ välillä $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.)

5. Kertomalla tehtävässä annettu funktion $f(x)$ hajotelmaehdotus

$$\frac{5}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3}.$$

puolittain tulolla $(x+1)(2x-3)$ saamme yhtälön

$$A(2x-3) + B(x+1) = 5.$$

Saamamme yhtälö pätee kaikilla muuttujan x arvoilla vain, jos muuttujan x ensimmäisen potenssin kertoimet kumoavat toisensa. Tämä havainto johtaa yhtälöpariin

$$\begin{aligned} 2A + B &= 0 \\ -3A + B &= 5, \end{aligned}$$

jossa ensimmäinen yhtälö koskee muuttujan x ensimmäisen potenssin kertoimia ja toinen yhtälö vakiotermejä.

Vähentämällä toisen yhtälön ensimmäisestä saamme $5A = -5$, josta ratkeaa $A = -1$. Sijoittamalla tämän arvon takaisin ensimmäiseen yhtälöön saamme $-2 + B = 0$, eli $B = 2$.

Löydettiin osamurtohajotelma

$$\frac{5}{(x+1)(2x-3)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{2x-3}.$$

Osamurtohajotelmaa hyödyntäen voimme integroida funktion:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{5}{(x+1)(2x-3)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{2x-3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= (-\ln|x+1| + \ln|x-\frac{3}{2}|) + C \\
&= \ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

Integraalin laskemisessa käytimme integrointisääntöä $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C$. Merkitsimme integrointivakiota kirjaimella C. Integraalifunktio on määritelty joko välillä $(\frac{3}{2}, \infty)$, $(-1, \frac{3}{2})$ tai $(-\infty, -1)$ (tai jollakin näiden osavälillä).

6. (a) Ei separoidu.

   (b) Separoituu: $y' = 2x(1+y)$. Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y = -1$. Lokaalin OY-lauseen ehdot pätevät. Tiedetään siis, että muut ratkaisut eivät saa arvoa $y = -1$ ja näin ollen $y + 1$ on jokaiselle niistä vakiomerkkinen. Muut ratkaisut saadaan separoinnista:

$$\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y) \\
\frac{y'}{1+y} &= 2x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\ln|y+1| &= x^2 + C_1 \\
|y+1| &= e^{x^2+C_1} \\
y+1 &= \pm e^{x^2+C_1} \\
y &= -1 \pm e^{x^2+C_1} \\
y &= -1 \pm e^{C_1}e^{x^2} \\
y &= -1 + Ce^{x^2}.
\end{aligned}$$

   Olemme lyhentäneet $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. Sallimalla lisäksi $C = 0$ saamme triviaaliratkaisun $y = -1$.

   (c) Yhtälö on separoituva. Huomioidaan triviaaliratkaisut $y = -1$ ja $y = \frac{3}{2}$ sekä OY-lauseen päteminen. Tiedetään siis myös lausekkeiden $y+1$ ja $y-\frac{3}{2}$ vakiomerkkisyys. Tehtävän 5 perusteella, ja integroimalla vakiofunktiota saamme

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y-\frac{3}{2}}{y+1}\right| &= 5x + C_1 \\
\left|\frac{y-\frac{3}{2}}{y+1}\right| &= e^{5x+C_1} \\
\frac{y-\frac{3}{2}}{y+1} &= \pm e^{5x+C_1} \\
\frac{y-\frac{3}{2}}{y+1} &= Ce^{5x} \\
y - \frac{3}{2} &= (y+1)Ce^{5x} \\
y(1-Ce^{5x}) &= \frac{3}{2} + Ce^{5x} \\
y &= \frac{\frac{3}{2}+Ce^{5x}}{1-Ce^{5x}}.
\end{aligned}$$

Olemme lyhentäneet $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. Sallimalla lisäksi $C = 0$ saamme triviaaliratkaisun $y = \frac{3}{2}$.