Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 4, syksy 2014

1. Eräs bakteerikanta mallinnetaan eksponentiaalisella kasvumallilla. Oletetaan että alussa bakteeripopulaation massa on $2\,mg$ ja yhden viikon kuluttua $100\,g$.

(a) Selvitä mallin Malthusin parametrin arvo yksikköineen.

(b) Milloin kanta on kymmentuhatkertaistunut alkuperäisestä?

2. Ratkaise AAT

$$\dot{x} + 4x = 4t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1/4.$$

Lyhyesti, onko ratkaisu määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä?

Ohje. Tarvinnet osittaisintegrointia.

3. 1000 asukkaan kylässä havaitaan vaarallista sorsainfluenssaa, jonka kestoparametriksi α arvioidaan $0.60\,vrk^{-1}$ ja tarttumisintensiteetiksi $\beta = 10^{-3}\,vrk^{-1}$. Tarkastelujaksossa kukaan ei ehdi kuolla eikä uusia asukkaita synny - tautitilannetta mallinnetaan SIS-mallilla.

(a) Kirjoita mallin DY-pari ja siitä eliminoinnilla saatava logistinen yhtälö.

(b) Ratkaise kyseinen yhtälö Bernoullin tyyppinä ja osoita ratkaisun avulla sairaiden määrän vain kasvavan (syntyy siis epidemia), kun heitä aluksi oli vain 10.

(c) Kuinka näet kasvun suoraan?

4. Tarkastellaan tartuntatautien SIR-mallia, tarkemmin sen paria (2.16),

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\alpha R_0 s(t)i(t), \quad \frac{di}{dt}(t) = \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t).$$

Oletetaan $0 < s(0), i(0) < 1$. Osoita että $i(t), s(t) > 0$ kaikilla t (joilla olemassa).

Ohje. Olivatpa ratkaisufunktiot $i(t)$ ja $s(t)$ mitä hyvänsä, voit kiinnittää ne vuorollaan ja soveltaa OY-lausetta 1.2 erikseen parin (2.16) yhtälöihin.

5. Jatkoa tehtävälle 4: Voit pitää tunnettuna että parin ratkaisu on olemassa välillä $[0, \infty[$ (seuraa systeemin Poistumislauseesta). Osoita että

$$(a) \quad \exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0, \quad (b) \quad \exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = 0.$$

Ohje. Sovella tehtävän 4 tulosta ja yhtälöä (2.18), lopuksi lemma 2.1.

6. Ratkaise, vähintään implisiittisesti, differentiaaliyhtälöt

$$(a) \quad y' = (x - y + 1)^2, \quad (b) \quad x^3 - xy^2y' + y^3 = 0.$$