

Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 3, syksy 2014

1. Ratkaise DY

$$2xy + (2y^2 + x^2)y' = 0.$$

Implisiittiratkaisu riittää.

2. Etsi integroiva tekijä yhtälölle

$$(x - y^2/2) + xyy' = 0$$

ja ratkaise tämä. Saako ratkaisun esitettyä eksplisiittisesti?

3. Merivesialtaan mitat ovat $16\text{m} \times 10\text{m} \times 3\text{m}$. Aluksi se on täynnä 3-prosenttista suolavettä.

(a) Altaaseen lasketaan 1-prosenttista suolavettä nopeudella $1\text{ m}^3/\text{min}$ ja samalla nopeudella pois täysin sekoittunutta vettä. Milloin altaan vesi on suolapitoisuudeltaan 2-prosenttista?

(b) Sama tehtävä mutta täysin sekoittunut suolavesi poistuu altaasta nopeudella $1.5\text{ m}^3/\text{min}$.

4. Etsi käyrät muotoa $y = y(x)$, joilla on ominaisuus että käyrän pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ asetettu tangentti aina leikkaa x -akselin pisteessä $(x_0 + x_0^2/k, 0)$, missä $k \neq 0$ on vakio.

5. Erään järven kalakannaksi laskettiin 10000 yksilöä vuonna 1990 ja 5000 yksilöä vuonna 2000. Mallinnetaan kalapopulaatiota $p(t)$ logistisella yhtälöllä (2.9), $\dot{p}(t) = rp(t)(1 - p(t)/K)$. Parametrin r arvoksi arvioidaan 0.1 (kun ajan t yksikkö on vuosi), mutta ympäristön kantokykyä K ei tunneta.

(a) Ratkaise K , (b) ennusta kalakanta vuonna 2010.

Huom. Jos myös r on tuntematon, tarvitaan (vähintään) kolme tunnettua populaation arvoa. Tällöin päädytään yhtälöryhmään, joka (yleensä) pitää ratkaista jollain numeerisella keinolla.

6. Kappaleen ja sen ympäristön lämpötilat olkoot ajan funktioita $T_1 = T_1(t)$ ja $T_2 = T_2(t)$ vuorovaikuttaen niin että kummankin muutosnopeus, kullakin hetkellä, on suoraan verrannollinen lämpötilaeroon $T_1(t) - T_2(t)$ verrannollisuuskertoimina vakiot $a < 0$ ja $b > 0$ (nk. Newtonin jäähtymislaki).

(a) Muodosta differentiaaliyhtälöpari funktioille T_1 ja T_2 .

(b) Onnistutko ratkaisemaan parin?

Ohje. (b) Eliminoi pari yhdeksi yhtälöksi.