

Differentiaaliyhtälöt I

Harjoitus 1, syksy 2014

1. Mitkä seuraavista ovat tavallisia differentiaaliyhtälöitä (DY)? Anna myös tuntematon funktio ja yhtälön kertaluku. Lisäksi, jos mahdollista, muuta DY normaalimuotoon.

$$(a) \quad \ddot{x} = (\dot{x} - 2)^2 - tx, \quad (b) \quad xy + \frac{d}{dx}(xy) = x^2,$$

$$(c) \quad xyz = \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy + yz, \quad (d) \quad y'(x) = y(x+1),$$

$$(e) \quad x^2 \sin(y') + y^{(4)}/y = \cos x^3, \quad (f) \quad x \sin(\dot{x})/t = t/\dot{x}.$$

Huom. Yhtälössä (d) kaikki sulussa oleva on kyseisen funktion argumenttia.

2. Osoita että funktiot

$$(a) \quad y = Ae^x, \quad (b) \quad y = e^{-x}(A \sin x + B \cos x), \quad (c) \quad y = A \exp(x^2/2)$$

(A ja B ovat vakioita) ovat ratkaisuja koko \mathbf{R} :ssä differentiaaliyhtälöille

$$(a) \quad y' - y = 0, \quad (b) \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad (c) \quad y'' - xy' - y = 0.$$

3. Osoita että funktio $y = \sin x$ on alkuarvotehtävän (AAT)

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 0,$$

ratkaisu. Mikä on maksimaalinen (yhtenäinen) ratkaisuväli? Huomaa että juuri on aina epänegatiivinen.

4. (a) Olkoot y ja z DY:n $2y' + x - \sin y = 0$ kaksi eri ratkaisua. Osoita että ne eivät leikkaa toisiaan, siis ei ole pistettä x_0 jolla $y(x_0) = z(x_0)$.

Ohje. Käytä teoreettista tulosta.

(b) Voiko AAT:llä $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(\pi/2) = 1$, olla useita eri ratkaisuja? Syy teoreettiselta kannalta, lyhyesti?

5. Esitä osamurtohajotelmana funktio

$$f(x) = \frac{5}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3},$$

siis määrää vakiot A ja B , ja integroi kyseinen funktio.

Ohje. Kerro hajotelmassa puolittain nimittäjän tekijöillä.

6. Ratkaise seuraavista separoituvat yhtälöt

$$(a) \quad y' = \tan(xy - y), \quad (b) \quad y' = 2x + 2xy, \quad (c) \quad y' = (y + 1)(2y - 3).$$

Ei tarvitse todistaa että ei ole separoituva.