

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014

Tehtävät viikolle 47

Nyt olemme loikanneet differentiaalilaskentaan. Näissä harjoituksissa esillä ovat derivointisäännöt, differentioituvuus (5.2.9. ja 5.2.10.) ja väliarvolause. Voit soveltaa kaikkia lukiosta tuttuja derivointisääntöjä.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Määritellään $f(x) = x^2$. Osoita, että kaikilla h pätee

$$f(4+h) = f(4) + 8h + h^2.$$

Miten tästä yhtälöstä voi päätellä derivaatan $f'(4)$?

O2 Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota f . Esitä $f(4+h)$ muodossa

$$f(4+h) = f(4) + 7h + hg(h).$$

Onko tulos ristiriidassa lauseiden 5.2.9. ja 5.2.10. kanssa?

K1 Derivoi

(a) $\sin^2(x^3)$

(b) $\cos^3(\sin^2(x^3))$

(c) $\sqrt{\cos^3(\sin^2(x^3))}$

K2 Määritellään funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdoilla: $f(x) = -x^2$ kun $x < 0$ ja $f(x) = x^2$ kun $x \geq 0$. Onko $f'(0)$ olemassa? Onko $f''(0)$ olemassa?

K3 Oletetaan, että funktio f toteuttaa ehdon $f'(1) = 3$. Selvitä

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{5h}.$$

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1, 4]$ ja dervivoituva välillä $(1, 4)$. Oletetaan, että $f(1) = 3$ ja että kaikilla $x \in (1, 4)$ pätee $-2 \leq f'(x) \leq 5$. Mitä voit väliarvolauseen perusteella sanoa arvosta $f(4)$?

O4 Johda tulon derivointisääntö differentioituvuuden (lemmat 5.2.9. ja 5.2.10.) avulla. Kerro keskenään yhtälöiden

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h)$$

ja

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hv(h)$$

oikeat puolet. (Tässä $u(h) \rightarrow 0$ ja $v(h) \rightarrow 0$ kun $h \rightarrow 0$.)

K4 Määritellään funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = |x|^3$. Millä x on olemassa $f'(x)$, $f''(x)$ ja $f'''(x)$?

K5 Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^3$ määriteltyä funktiota. Päättele $f'(x)$ yhtälöstä

$$f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

K6 Olkoot $p > 0$, q ja r reaalilukuja. Osoita, että yhtälöllä

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

on enintään kaksi reaalijuurta soveltamalla kurssin tietoja funktioon $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$.