

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014

Tehtävät viikolle 44

Kurssi jatkuu! Palaamme taas funktion raja-arvojen pariin. Mutta katsoimme myös kirjan sivulta 33 alkavaa trigonometristen funktioiden käsitteilyä. Kannattaa muistaa, että jatkuvuus ja derivoituvuus tietyssä pisteessä ovat vain esimerkkejä funktion raja-arvon käsitteestä.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 3$$

on epätosi.

O2 Oletetaan, että g on mikä tahansa funktio, joka toteuttaa kaikilla $x \in (-1, 1)$ ehdon $|g(x)| \leq 3$. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = xg(x)$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x = 0$.

K1 Todista määritelmän perusteella, että

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} \rightarrow \frac{5}{3}$$

kun $x \rightarrow 2$.

K2 Todista määritelmän perusteella, että $x^3 \rightarrow 8$ kun $x \rightarrow 2$. Tiedosta $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ voi olla apua.

K3 Todista määritelmien perusteella, että yhtälöllä $f(x) = |x|$ määritelty funktio on jatkuva jokaisen a kohdalla. Asiaa voi yksinkertaistaa, jos tarkastelet erikseen tapauksia $a > 0$, $a < 0$ ja $a = 0$.

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Todista kirjan sivulta 35 Lemman 1.6.2. kaksi ensimmäistä yhtälöä. Lue siis kirjaa (porukalla).

O4 Todista kirjan sivulta 36 Lemman 1.6.3 tulos. Lue siis kirjaa (porukalla).

K4 Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

on epätosi.

K5 Osoita määritelmien perusteella, että tehtävän K3 funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

K6 Oletetaan, että g on mikä tahansa funktio, joka toteuttaa kaikilla $x \in (-1, 1)$ ehdon $|g(x)| \leq 3$. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x^2g(x)$ määritelty funktio on derivoituva kohdassa $x = 0$.