MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014
Tehtävät viikolle 41

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Oletetaan, että (x_n) on lukujono, jolle pätee $x_n \to a$, kun $n \to \infty$. Osoita suoraan määritelmän perusteella, että (a) $x_{n+1} \to a$ kun $n \to \infty$,
(b) $x_{n^2} \to a$ kun $n \to \infty$, ja
(c) $x_{n-1} \to a$ kun $n \to \infty$.
Onko kirjassa lausetta, josta (b) seuraa? Mitähän (c) oikeastaan tarkoittaa, kun x_{1-1} ei tarkoita mitään.

O2 Oletetaan, että (x_n) on lukujono, jolle pätee $x_n \to a$, kun $n \to \infty$. Oletetaan, että $x_n \geq 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Osoitam että

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$$

kun $n \to \infty$.

K1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{n^2 + n}{n + 1} \to \infty$$

kun $n \to \infty$.

K2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \to \infty$$

kun $n \to \infty$.

K3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{3 - n^2}{n + 1} \to -\infty$$

kun $n \to \infty$.

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Osoita, että ehdot
(i) $x_n \to \infty$ kun $n \to \infty$, ja
(ii) $-x_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$
ovat yhtäpitäviä.

O4 Oletetaan, että $a > 1$. Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla, että $a^n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

K4 Selvitä luvun e määritelmän avulla raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Huomaa, että tehtävän O2 tuloksesta voi olla apua.

K5 Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$ kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

K6 Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$ kun $n \to \infty$. Oletetaan lisäksi, että $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. (Lisäkysymys kiinnostuneille: voidaanko tulon $x_n y_n$ rajakäyttäytymisestä sanoa mitään yleistä, jos $a = 0$?)