MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014
Tehtävät viikolle 40

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Oletetaan, että (x_n) on lukujono, jolle pätee $|x_n| \to 0$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n \to 0$.

O2 Lukujonon raja-arvon määritelmä voidaan kirjoittaa kvanttorimerkeillä lyhyesti muodossa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N}_1 \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Mitä seuraavat muunnelmat kertovat lukujonosta (x_n):
(a) $\forall \varepsilon > 0 \forall K \in \mathbb{N}_1 \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon$;
(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0 \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon$.

K1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} \to 1$$

kun $n \to \infty$.

K2 Selvitä lukujonojen raja-arvoja koskevien kurssimme tietojen perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+1}.$$

K3 Selvitä lukujonojen raja-arvoja koskevien kurssimme tietojen perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^3+5n+1}.$$

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (y_n) toteuttavat seuraavat ehdot:
(i) $y_n \to a$ kun $n \to \infty$,

(ii) (x_n) on nouseva, ja
(iii) $x_n \leq y_n$ kaikilla n.
Osoita, että
(iv) $x_n \leq a + 1$ kaikilla n, ja
(v) jono (x_n) suppenee.

O4 Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$ ja $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Yksi mahdollisuus on tarkastella erikseen tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$.

K4 Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla, että

$$\frac{1}{2^n} \to 0$$

kun $n \to \infty$.

K5 Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\frac{(x_n)^7}{n} \to 0$$

kun $n \to \infty$.

K6 Tarkastellaan seuraavaa rekursiivisesti määriteltyä lukujonoa: $x_1 = 3$ ja kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}).$$

Osoita, että jono (x_n) suppenee ja että sen raja-arvo on $\sqrt{7}$. Vihje: muuntele luentojen vastaavaa esimerkkiä.