

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014

Tehtävät viikolle 39

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

**O1** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 2$$

on epätosi. (Ei saa siis vedota tehtävän K1 tulokseen!)

**O2** Oletetaan, että  $a$  on joukon

$$A = \{x > 0 \mid x^2 < 3\}$$

supremum. Osoita, että  $a^2 = 3$  (Siis  $a = \sqrt{3}$ .) Kannattaa muunnella luentojen esimerkkiä, joka liittyy lukuun  $\sqrt[3]{2}$ . Mistä muuten tiedetään, että joukolla  $A$  on olemassa supremum.

**K1** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

on tosi.

**K2** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$$

on tosi.

**K3** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n+3}) = 0$$

on tosi. Kannattaa laventaa neliöjuurten erotus lausekkeella  $\sqrt{n+7} + \sqrt{n+3}$ .

### Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

**O3** Tarkastellaan lukujonoja  $(x_n)$  ja  $(y_n)$ . Oletetaan, että

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , ja
- (b) kaikilla  $n \in \mathbb{N}_1$  pätee  $|y_n| \leq 7$ .

Merkitään  $z_n = x_n y_n$ . Osoita, että jono  $(z_n)$  suppenee.

**O4** Tarkastellaan lukujonoja  $(x_n)$  ja  $(y_n)$ .

(a) Oletetaan, että jonot  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  hajaantuvat. Hajaantuuko tällöin välttämättä myös jono  $(x_n + y_n)$ ?

(b) Oletetaan, että jonot  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  hajaantuvat. Hajaantuuko tällöin välttämättä myös jono  $(x_n y_n)$ ?

(c) Oletetaan, että jono  $(x_n)$  suppenee ja  $(y_n)$  hajaantuu. Hajaantuuko tällöin välttämättä myös jono  $(x_n + y_n)$ ?

(d) Oletetaan, että jono  $(x_n)$  suppenee ja  $(y_n)$  hajaantuu. Hajaantuuko tällöin välttämättä myös jono  $(x_n y_n)$ ?

(e) Oletetaan, että jono  $(x_n)$  suppenee ja  $(y_n)$  hajaantuu. Oletetaan lisäksi, että kaikilla  $n$  pätee  $x_n \neq 0$ . Hajaantuuko tällöin välttämättä myös jono  $(x_n y_n)$ ?

**K4** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n - 1} = 1$$

on tosi.

**K5** Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n - 1} = 2$$

on epätosi.

**K6** Lukujonon osajonon käsite määritellään kirjan sivulla 48. Tarkastellaan lukujonoa  $(x_n)$ , missä kaikilla  $n$  pätee

$$x_n = (-1)^{n+1}.$$

Anna esimerkki tämän jonon kahdesta suppenevasta osajonosta, joilla on erisuuret raja-arvot.