

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014

Tehtävät viikolle 38

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Selvitä itseisarvolemman avulla, mitkä reaalityöt x toteuttavat epäyhtälön $|x - 2| < 1$. (Tähän liittyy itseisarvolemman muoto: Jos $a > 0$, niin kaikilla reaalityöillä t pätee: $|t| < a$ jos ja vain jos $-a < t < a$.)

O2 Esitä $x^2 - 4$ tulona ja osoita tämän avulla, että epäyhtälö $|x^2 - 4| \leq 5|x - 2|$ pätee aina kun $|x - 2| < 1$. Päteekö $|x^2 - 4| < 5|x - 2|$ aina kun $|x - 2| < 1$?

K1 Oletetaan, että reaalityö x toteuttaa ehdon $0 < x < 3$ ja ehdon $1 < x < 4$. Osoita, että tällöin pätee $|x - 2| < 1$.

K2 Osoita itseisarvon määritelmän perusteella, että kaikille x pätee $|x| \geq 0$.

K3 Osoita itseisarvon määritelmän perusteella, että kaikilla reaalityöillä x ja $y \neq 0$ pätee

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Todistus kannattaa jakaa tapauksiin sen mukaan millaisista luvuista on kyse. Lisäkysymys (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): miten päättely muuttuisi, jos osamäärän asemesta tarkasteltaisiin tuloa?

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Palauta mieleen tehtävän O2 tulos. Oletetaan, että $|x - 2| < 5^{-7777}$. Mitä osaamme sanoa etäisyydestä $|x^2 - 4|$?

O4 Mikä on Bernoullin epäyhtälö? Miten se todistetaan? Tutki kirjan sivua 25.

K4 (a) Laske erotus

$$\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}.$$

(b) Osoita arvioimalla ylöstäin, että edellisen kohdan erotuksen itseisarvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin $\frac{2}{n}$.

K5 Oletetaan, että $n > 2^{33333}$. Mitä pystyt tällöin sanomaan etäisyydestä

$$\left| \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right|$$

edellisen tehtävän (b)-kohdan perusteella.

K6 Kirjassa määritellään supremum ja infimum sivuilla 18-22. Selvitä puoliavoimen välin $[3, 7)$ supremum ja infimum. Perustele vastauksesi, mutta vielä tällä kertaa ei vaadita aivan täsmällisiä todistuksia.