MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014
Tehtävät viikolle 37

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y, että $xy = 1$. Miksei luvulla 0 ole käänteislukua? Toisin sanoen: miksi nollalla ei saa jakaa?

O2 Etsi positiivinen murtoluku $\frac{a}{b}$, jolle pätee kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{n^2 + 2n}{2n^2 + n} \leq \frac{a}{b}.$$

(Tässä a ja b ovat kokonaislukuja.) Kasvata osoittajaa ja pienennä nimittäjää. Perustelu!

K1 Etsi positiivinen reaaliluku K, jolle pätee kaikilla x: jos $1 < x < 2$, niin $x^2 - 1 < K(x - 1)$.

K2 Etsi positiivinen reaaliluku h, joka on niin pieni, että kaikilla x pätee: jos $1 < x < 1 + h$, niin $1 < x^2 < 1 + 3^{-10000}$. Kannattaa soveltaa edellisen tehtävän tulosta.

K3 Tiedetään, että $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Etsi tämän tiedon avulla positiivinen reaaliluku K, jolle pätee kaikilla x: jos $1 < x < 2$, niin $x^3 - 1 < K(x - 1)$.

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 (a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$.
(b) Oletetaan, että $1 < x$. Päteekö tällöin $x^2 < x^5$?
Perustelu!

O4 Kurssikirjan sivulla 21 osoitetaan, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. (Todistus saattaa olla joillekin koulusta tuttu.) Mukaile tuota todistusta ja osoita, että $\sqrt[3]{5}$ on irrationaaliluku.

K4 Etsi positiivinen murtoluku $\frac{a}{b}$, jolle pätee kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{n^2 + 2n}{2n^2 + n} \geq \frac{a}{b}.$$

(Tässä a ja b ovat kokonaislukuja.) Pienennä osoittajaa ja kasvata nimittäjää. Perustelu!

Lisäkysymys: Millaisen tiedon saat yhdistämällä tehtävien O2 ja K4 tulokset?

K5 Sovelletaan tehtävän K3 tulosta. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku, että kaikilla x pätee: jos $1 < x < 1 + h$, niin $1 < x^3 < 1 + 7^{-10000}$.

K6 Vaikuttaa, että luvut

$$\frac{n+1}{2n+3},$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$, ovat lähellä lukua $\frac{1}{2}$, kun n on suuri. Tässä tehtävässä yritetään antaa tälle vaikutelmalle täsmällistä sisältöä.

(a) Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{n}.$$

(Laske erotus ja pienennä tuloksen nimittäjää.)

(b) Oletetaan, että $n > 10^{10000}$. Osoita, että

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2n+3} < 10^{-10000}.$$