

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2014

Tehtävät viikolle 48

Tällä kertaa käsitellään lähinnä väliarvolausetta ja sen sovelluksia.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Tarkista kirjasta lokaalin ääriarvon määritelmä. Selvitä määritelmän ja kurssimme tietojen avulla huolellisesti funktion $f(x) = x^3$ lokaalit ääriarvot välillä $[-1, 2]$. Mikä on aivan kuin lukiossa ja missä (jos missään) on eroa?

O2 Oletetaan, että funktio $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $(0, 1)$. Oletetaan lisäksi, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee $f'(x) < x^2$. Mitä näillä oletuksilla voidaan tietää arvosta $f(1)$? Vihje: sovelta väliarvolausetta yhtälöllä

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - f(x)$$

määriteltyyn funktioon.

K1 Oletetaan, että funktio $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $(0, 1)$. Oletetaan lisäksi, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee $1 < f'(x) < 2$. Mitä näillä oletuksilla voidaan tietää arvosta $f(1)$?

K2 Oletetaan, että funktio $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $(0, 1)$. Oletetaan lisäksi, että $f(1) = 7$ ja että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee $1 < f'(x) < 2$. Mitä näillä oletuksilla voidaan tietää arvosta $f(0)$?

K3 Oletetaan, että a_1, \dots, a_n ovat reaalityyppisiä lukuja. Millä arvolla x neliösumma $(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ saa pienimmän arvonsa? Huolellinen perustelu kurssimme tietojen avulla!

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Tarkastellaan funktiota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

kun $x \neq 0$.

(a) Osoita, että f on kaikkialla derivoituva.

(b) Onko f' rajoitettu välillä $[-1, 1]$?

(c) Onko f' jatkuva välillä $[-1, 1]$?

Tehtävän tuloksia kannattaa verrata tehtävään K6.

O4 Oletetaan, että funktio $f: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $(0, 3)$. Oletetaan, että $f'(1) = 5$ ja $f'(2) = 7$. Osoita, että on olemassa $c \in (1, 2)$, jolle pätee $f'(c) = 6$. Vihje: tutki apufunktiota $g(x) = f(x) - 6x$. Derivaattalemmasta 5.3.1. on apua.

K4 Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikille x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa huomata, että $\cos 0 = 1$.)

K5 Tarkastellaan funktioita $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty yhtälöillä

$$f(x) = x + \sin x \text{ ja } g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$$

Määritä funktioiden f ja g lokaalit ääriarvot.

K6 Oletetaan, että funktio $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $(-1, 1)$. Oletetaan lisäksi, että toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0).$$