**Analyysi I, 1. kurssikoe to 23.10.2014, ratkaisut ja arvostelukommentteja**
**Arvostelijat: Mika Koskenoja: tehtävät 1 ja 4; Jouni Luukkainen: tehtävät 2 ja 3**
*(Korvaavasta 1. kurssikokeesta 30.10.2014 ei tehdä tällaisia ratkaisuja. Molempien kokeiden arvostelu valmistui su 2.11.2014.)*

**Teht. 1.** *Selvitä*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n}{n^3+1}.$$

*Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita ja tietoa vakiojonojen ja jonon* $(x_n)$, *missä* $x_n = \frac{1}{n}$ *kaikilla* $n$, *raja-arvoista.*

**Ratk.** Laskemalla, mutta erottelematta eri raja-arvosääntöjä eri vaiheisiin saadaan (**oikea idea 2 p**, **oikea tulos 1 p**):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^3} = \frac{3+0^2}{1+0^3} = 3.$$

Esittämällä tämä lasku lukujonojen raja-arvoja koskevia tuloksia vaiheittain käyttäen, vaikkakin niitä erikseen mainitsematta saadaan (nyt mukana myös **perustelut 3 p**)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^3\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3}$$

$$= \frac{3+\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)^3} = \frac{3+0^2}{1+0^3} = \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

Tässä siis mutkikkaampien lausekkeiden raja-arvojen olemassaolo ja suuruus palautettiin aina yksinkertaisempien lausekkeiden raja-arvojen olemassaoloon ja suuruuteen.

Tarvittiin seuraavat tulokset "raja-arvojen aritmetiikasta": Jos $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat suppenevia lukujonoja, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, niin lukujonot $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ suppenevat, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$; jos pätee lisäksi, että $y_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $y \neq 0$, niin lukujono $(x_n/y_n)$ suppenee ja $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = x/y$. Tarvittiin myös tulokset, että jos $a \in \mathbb{R}$, niin vakiojonolle $(x_n) = (a)$ on $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ja että $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Esitetään päättely vielä yksinkertaisempien lausekkeiden raja-arvoista mutkikkaampien lausekkeiden raja-arvoihin edeten. Ensiksikin, jos $n \in \mathbb{N}$, niin $n^3 + 1 \neq 0$ ja $\dfrac{3n^3+n}{n^3+1} = \dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^3}}$ supistamalla $n^3$:lla. Nyt voidaan päätellä, että $3 \to 3$, $1 \to 1$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \to 0^2 = 0$ ja $\left(\dfrac{1}{n}\right)^3 \to 0^3 = 0$ ja siis $\dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \to 0$ sekä $\dfrac{1}{n^3} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^3 \to 0$, kun $n \to \infty$; tämän jälkeen, että $3 + \dfrac{1}{n^2} \to 3 + 0 = 3$ ja $1 + \dfrac{1}{n^3} \to 1 + 0 = 1 \neq 0$, kun $n \to \infty$; sekä lopuksi, että $\dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^3}} \to \dfrac{3}{1} = 3$, kun $n \to \infty$.

**Arvostelusta.** Keskeiset väitteet $\lim_{n\to\infty}(1/n^2) = 0$ ja $\lim_{n\to\infty}(1/n^3) = 0$ seuraavat myös kuristusperiaatteen nojalla siitä, että $0 \leq 1/n^3 \leq 1/n^2 \leq 1/n \to 0$, kun $n \to \infty$. Mutta kokonaan näiden väitteiden perustelun ohittaminen saattoi viedä 2 p. Sakkoa 1 p saattoi tulla siitä, että yhdisti eri raja-arvosääntöjä samassa kohdassa.

**Teht 2.** *Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+1} = 4.$$

*(Tehtävässä ei siis saa vedota kurssilla todistettuihin lukujonon raja-arvoa koskeviin lauseisiin.)*

**Ratk.** Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan (reaalilukujen täydellisyysaksiomaan perustuvan Arkhimedeen lauseen nojalla) sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$. Tällöin, kun $n > n_\varepsilon$, jolloin $n > 1/\varepsilon$, niin

$$\left|\frac{4n+3}{n+1} - 4\right| = \left|\frac{(4n+3)-(4n+4)}{n+1}\right| = \frac{|-1|}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

**Arvostelusta.** Määritelmän mukaisten osien "olkoon $\varepsilon > 0$", "valitaan sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$" ja "kun $n > n_e$" oli kaikkien oltava mukana ja juuri tässä järjestyksessä; kustakin puutteesta sakkoa 1 p. Tässä suhteessa arvostelu oli siis ankaraa.

Toisaalta arvostelu oli lievää. Siitä, että kynnystä $n_\varepsilon$ ei valinnut luonnolliseksi luvuksi, kuten olisi pitänyt, vaan vaikkapa otti $n_\varepsilon = 1/\varepsilon$, ei sakotettu. Sanontojen epäloogisuuksista kuten "valitaan $\varepsilon > 0$" (ei todistaja itse saa valita!), "olkoon $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$" (siis muka "kaikille"; mutta onko niitä edes yhtään?) tai "valitaan $n > n_\varepsilon$" (silloinhan voitaisiin valita vaikkapa $n = n_\varepsilon + 1$, eikä se riittäisi!) ei kuitenkaan sakotettu [yhteensä näissä väärissä sanonnoissa määritelmän kvanttorijono $\forall\,\exists\,\forall$ on siis vaihtunut jonoksi $\exists\,\forall\,\exists$].

Muutoin pienistä virheistä, kuten aidon epäyhtälön $<$ kirjoittaminen joskus yhtälönä toteutuvan epäaidon epäyhtälön $\leq$ sijasta, ei sakotettu.

*Arvostelu oli siis sikäli niin lievää, että 6 pisteenkin vastaukseen mahtui paljon virheitä ja puutteita!*

Oikein esitetystä määritelmästä ei saanut pistettäkään eikä väärin esitetystä määritelmästä menettänyt pistettäkään, vaan arvostelussa tarkasteltiin yksinomaan todistusta.

Huolimattomuus laventamisessa saattoi tuottaa muodon $2/(n+1)$, joka ei oleellisesti eroa oikeasta muodosta $1/(n+1)$; sakkoa 1 p. Arviointi $1/(n+1) \leq 1/(2n)$ ei päde, mutta jatkon kannalta virhe ei ole oleellinen; sakkoa 1 p. Mutta huolimaton laventaminen tai oikean lausekkeen liian karkea arviointi saattoi tuottaa myös lausekkeen, joka ei enää suppene kohden nollaa, kun $n \to \infty$; tämä kaatoi jatkon. Samoin arviointi alaspäin kaatoi jatkon.

**Teht. 3.** *Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

**Ratk.** Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $\delta > 0$, jolla $\delta \leq 1$ ja $\delta \leq \varepsilon/7$. Voidaan valita esimerkiksi $\delta = \min(1, \varepsilon/7) > 0$. Olkoon nyt $0 < |x-3| < \delta$. Tällöin $|x-3| < 1$. Täten kolmioepäyhtälön nojalla $|x+3| = |(x-3)+6| \leq |x-3| + 6 < 1 + 6 = 7$ tai vaihtoehtoisesti itseisarvolemman nojalla $-1 < x-3 < 1$, jolloin $0 < 5 < x+3 < 7$ ja siis $|x+3| = x+3 < 7$. Toisaalta $|x-3| < \varepsilon/7$. Näin ollen

$$|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3| \leq 7|x-3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$

**Arvostelusta.** Määritelmän mukaisten osien "olkoon $\varepsilon > 0$", "valitaan sellainen $\delta > 0$, jolla $\delta \leq 1$ ja $\delta \leq \varepsilon/7$" ja "olkoon $0 < |x-3| < \delta$" oli kaikkien oltava mukana ja juuri tässä järjestyksessä; kustakin puutteesta sakkoa 1 p. Se, että oli mahdollisesti esittänyt ratkaisun alussa määritelmän, ei riittänyt korvaamaan tällaisen kohdan puuttumista itse todistuksessa. Sanontojen epäloogisuuksista kuten "valitaan $\varepsilon > 0$" (ei todistaja itse saa valita!), "olkoon $\delta > 0$ sellainen, jolla $\delta \leq 1$ ja $\delta \leq \varepsilon/7$" (siis muka "kaikille"; mutta onko niitä edes yhtään?) tai "valitaan sellainen $x$, jolla $0 < |x-3| < \delta$" (silloinhan voitaisiin valita vaikkapa $x = 3 + \delta/2$, eikä se riittäisi!) ei kuitenkaan sakotettu [yhteensä näissä väärissä sanonnoissa määritelmän kvanttorijono $\forall\,\exists\,\forall$ on siis vaihtunut jonoksi $\exists\,\forall\,\exists$]. Jättämällä ehdosta $0 < |x-3| < \delta$ raja-arvon määritelmään sisältyvän vasemmanpuoleisen epäyhtälön pois sai tehtävän tilanteessa todistettua vahvemman väitteen, eikä siitä nyt sakotettu.

Muutoin pienistä virheistä, kuten aidon epäyhtälön $<$ kirjoittaminen joskus yhtälönä toteutuvan epäaidon epäyhtälön $\leq$ sijasta, ei sakotettu.

*Arvostelu oli siis sikäli niin lievää, että 6 pisteenkin vastaukseen mahtui paljon virheitä ja puutteita!*

**Teht. 4.** *Oletetaan, että $A$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko positiivisia reaalilukuja ja että $a = \sup A$. Merkitään*

$$B = \{-2x \mid x \in A\}.$$

*Osoita tarkasti, että $-2a = \inf B$.*

**Ratk.** Huomataan, että $\sup A$ on todella olemassa, sillä se seuraa viime kädessä täydellisyysaksiomannojalla oletuksesta, että $A$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko. Huomataan myös, että $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = -2x \text{ jollain } x \in A\}$.

**I tapa.** Jos $b \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} b \text{ on joukon } B \text{ alaraja } &\Leftrightarrow\ y \geq b \text{ kaikilla } y \in B \ \Leftrightarrow\ -2x \geq b \text{ kaikilla } x \in A \\ &\Leftrightarrow\ x \leq -\frac{b}{2} \text{ kaikilla } x \in A \ \Leftrightarrow\ -\frac{b}{2} \text{ on joukon } A \text{ yläraja } \Leftrightarrow -\frac{b}{2} \geq a \Leftrightarrow b \leq -2a. \end{aligned}$$

Täten $-2a$ on joukon $B$ suurin alaraja: $\exists \inf B = \max ]-\infty, -2a] = -2a$.

**II tapa.** Luku $-2a$ on joukon $B$ alaraja, sillä jos $y \in B$, niin $y = -2x$ jollain $x \in A$, jolloin $x \leq a$ ja siis $y \geq -2a$.

Mikään lukua $-2a$ suurempi luku ei ole $B$:n alaraja, sillä jos $\varepsilon > 0$, niin [selitystä, joka ei ole välttämätöntä: $a - \varepsilon/2 < a$, joten $a - \varepsilon/2$ ei ole $A$:n yläraja, ja siis] $x > a - \varepsilon/2$ jollain $x \in A$, jolloin $y = -2x \in B$ ja $y < -2(a - \varepsilon/2) = -2a + \varepsilon$ [, minkä vuoksi $-2a + \varepsilon$ ei ole $B$:n alaraja].

Täten $-2a$ on joukon $B$ suurin alaraja, eli $\inf B = -2a$.

Jälkimmäisen puolen saattoi todistaa myös seuraavasti: Oletetaan, että $B$:llä on alaraja $b > -2a$. Tällöin $-2x \geq b$ kaikilla $x \in A$. Siis $x \leq -b/2$ kaikilla $x \in A$. Täten $-b/2$ on $A$:n yläraja. Ristiriita, sillä $-b/2 < a = \sup A$.

**Arvostelu.** Luvun $-2a$ osoittaminen $B$:n alarajaksi toi 3 pistettä; samoin sen osoittaminen, että $B$:llä ei ole lukua $-2a$ suurempaa alarajaa.

Alkuosan pisteet kertyivät tarkemmin seuraavasti: Koska $x \leq a$ kaikilla $x$ (1 p), niin $-2x \geq -2a$ kaikilla $x \in A$ (1 p), joten $-2a$ on joukon $B$ alaraja (1 p). Pelkkä väite, että $-2a$ on $B$:n alaraja, tuotti 0 p; toisaalta tätä johtopäätöstä ei saanut jättää pois.

Joukko $B$ on siis alhaalta rajoitettu. Lisäksi $B$ on epätyhjä, sillä koska $A$ on epätyhjä, niin on olemassa alkio $x_0 \in A$, jolloin $-2x_0 \in B$. Täten täydellisyysaksioman perusteella on olemassa $\inf B$, ja $\inf B \geq -2a$. Mutta $B$:n infimumin olemassaoloa ei tarvinnut erikseen tällä tavalla osoittaa. Pelkästä osoituksesta ei edes tullut pisteitä.

Puhuminen joukon $A$ pienimmän ylärajan $\sup A$ sijasta joukon $A$ suurimmasta alkiosta $\max A$ tai vastaavasti joukun $B$ suurimman alarajan $\inf B$ sijasta joukon $B$ pienimmästä alkiosta $\min B$ saattoi viedä pisteet nollaan, sillä toisaalta ei tarvitse olla olemassa lukua $\max A$ eikä lukua $\min B$ ja toisaalta tehtävä on paljon helpompi, jos $\exists \max A$ tai yhtäpitävästi $\exists \min B$ (ts. jos $a \in A$ eli vastaasti $-2a \in B$).

Joukon $A$ kuvaaminen kasvavana suppevana jonona ja vastaavasti joukon $B$ kuvaaminen vähenevänä suppevana jonona (tai siis oikeammin tällaisten jonojen kuvajoukkoina) ja lukuja $a$ ja $-2a$ näiden jonojen raja-arvoina ei tuottanut pisteitä.

**Huom.** Luennoilla ja harjoituksissa on konstruoitu luvut $\sqrt[3]{2}$ ja $\sqrt{3}$ tiettyjen joukkojen supremumeina; tällöin on jouduttu vetoamaan reaalilukujen täydellisyysaksiomaan. Mutta käytetty tekniikka ei ole kovin sopiva seurattavaksi tässä koetehtävässä: sen sijaan, että ensin osoitettaisiin, että on olemassa $b = \inf B$, ja sitten, että ei voi olla $b > -2a$ eikä $b < -2a$, kannatti tutkia suoraan lukua $-2a$ ja osoittaa sen toteuttavan $\inf B$:n määritelmän ominaisuudet; tähän ajattelutapaan viittasi tehtävänannon osoitettava yhtälö $-2a = \inf B$.