INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 49

O1 - O4 i höstens sista uppgifter är gamla provuppgifter från höstens andra mellanprov. I uppgifterna K1 - K6 behandlar vi så kallade transcendenta funktioner.

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Utred

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 1}{6x + 1}$$

Motivera dina påståenden med hjälp av kursens kunskaper. (I uppgiften får man använda sig av det man vet om den konstanta funktionens och funktionens $f(x) = x$ gränsvärden.)

O2 Vi definierar att $f(0) = 0$ och

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

då $x \neq 0$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$.

K1 Derivera $x^{\frac{2}{3}}$
(a) med de från skolan bekanta deriveringsreglerna;
(b) med hjälp av den sammansatta funktionens, inversfunktionens och heltalspotensernas deriveringsregler.

K2 Anta att $x > 0$ och att m, n och p är positiva heltal. Bevisa med hjälp av rotens definition och räknereglerna för potenser med heltalsexponenter ekvationerna
(a) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$
(b) $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$

K3 Härled logaritmuttrycket och deriveringsformeln för inversfunktionen till funktionen $\sinh x$. Bekanta dig med sidorna 84 och 85 i Hurri-Syrjänens material. (En länk till materialet hittas på kursens hemsida.)

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $(1, 2)$. Anta vidare att

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \text{ och att } \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$$

Visa att det existerar ett $a \in (1, 2)$ för vilket gäller att $f(a) = 7$.

O4 Vi definierar $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Visa att för alla $x \geq 0$ gäller

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0$$

K4 Visa t.ex genom att undersöka första och andra derivatan att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^7} = \infty$$

K5 Härled ekvationen

$$Dar\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

där $x > 1$. Även här lönar det sig att läsa i Hurri-Syrjänens material, den här gången sidorna 85 och 86.

K6 Vi definierar $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla $x > 0$ gäller

$$\cos x > 2 - \cosh x$$