INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 48

Den här gången behandlar vi främst medelvärdessatsen och dess tillämpningar.

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Sök upp definitionen för lokala extremvärlden i boken. Utred omsorgsfullt med hjälp av definitionen och kursens kunskaper de lokala extremvärdena för funktionen $f(x) = x^3$ i intervallet $[-1, 2]$. Vad görs på samma sätt som i gymnasiet och vad (om något) skiljer sig från detta tillvägagångssätt?

O2 Anta att funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta vidare att $f(0) = 7$ och att för alla $x \in (0,1)$ gäller $f'(x) < x^2$. Vad kan man utgående från dessa antaganden säga om värdet $f(1)$? Tips: Tillämpa medelvärdessatsen för den med ekvationen

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - f(x)$$

definierade funktionen.

K1 Anta att funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta vidare att $f(0) = 7$ och att för alla $x \in (0,1)$ gäller $1 < f'(x) < 2$. Vad kan man utgående från dessa antaganden säga om värdet $f(1)$?

K2 Anta att funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta vidare att $f(1) = 7$ och att för alla $x \in (0,1)$ gäller $1 < f'(x) < 2$. Vad kan vi utgående från dessa antaganden säga om värdet $f(0)$?

K3 Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilket värde på x antar kvadratsumman $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ sitt minsta värde? Motivera omsorgsfullt utgående från kursens kunskaper.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Vi undersöker funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $f(0) = 0$ och

$$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$$

då $x \neq 0$.

(a) Visa att f är deriverbar överallt.
(b) Är f' begränsad i intervallet $[-1, 1]$?
(c) Är f' kontinuerlig i intervallet $[-1, 1]$?
Det lönar sig att jämföra resultaten med uppgift K6.

O4 Anta att funktionen $f\colon (0, 3) \to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet $(0, 3)$. Vi antar även att $f'(1) = 5$ och $f'(2) = 7$. Visa att det existerar ett sådant $c \in (1, 2)$ att $f(c) = 6$. Tips: Undersök hjälpfunktionen $g(x) = f(x) - 6x$. Derivatalemmat 5.3.1. kan vara till hjälp.

K4 Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla x gäller $|\cos x - 1| \leq |x|$. Kom ihåg att $\cos 0 = 1$.

K5 Vi undersöker funktionerna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras med ekvationerna

$$f(x) = x + \sin x \text{ och } g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$$

Bestäm lokala extremvärden för funktionerna f och g.

K6 Anta att funktionen $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet $(-1, 1)$. Anta vidare att gränsvärdena $\lim_{x \to 0^-} f'(x)$ och $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ existerar. Visa att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0).$$