INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 47

Den här veckans uppgifter behandlar deriveringsreglerna, differentierbarhet (5.2.9 och 5.2.10) och medelvärdessatsen. Du får använda dig av alla deriveringsregler bekanta från gymnasiet.

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Vi definierar $f(x) = x^2$. Visa att för alla h gäller

$$f(4+h) = f(4) + 8h + h^2.$$

Hur kan man ur denna ekvation bestämma derivatan $f'(4)$?

O2 Vi undersöker funktionen f från föregående uppgift. Ge $f(4+h)$ på formen

$$f(4+h) = f(4) + 7h + hg(h).$$

Är resultatet i konflikt med satserna 5.2.9. och 5.2.10.?

K1 Derivera
(a) $\sin^2(x^3)$
(b) $\cos^3(\sin^2(x^3))$
(c) $\sqrt{\cos^3(\sin^2(x^3))}$

K2 Vi definierar funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med kraven: $f(x) = -x^2$ då $x < 0$ och $f(x) = x^2$ då $x \geq 0$. Existerar $f'(0)$? Existerar $f''(0)$?

K3 Anta att funktionen f uppfyller kravet $f'(1) = 3$. Utred uttrycket

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{5h}.$$

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1,4]$ och deriverbar i intervallet $(1,4)$. Anta vidare att $f(1) = 3$ och att för alla $x \in (1,4)$ gäller

$-2 \leq f'(x) \leq 5$. Vad kan du utgående från medelvärdessatsen säga om värdet $f(4)$?

O4 Härled deriveringsreglerna för en produkt med hjälp av differentierbarheten (lemma 5.2.9. och 5.2.10.). Multiplicera ekvationernas

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h)$$

och

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hv(h)$$

högerled med varandra. (Här $u(h) \to 0$ och $v(h) \to 0$ då $h \to 0$.)

K4 Vi definierar funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med kravet $f(x) = |x|^3$. För vilka x existerar $f'(x)$, $f''(x)$ och $f'''(x)$?

K5 Vi undersöker en med ekvationen $f(x) = x^3$ definierad funktion. Bestäm $f'(x)$ utgående från ekvationen

$$f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

K6 Låt p, q och r vara reella tal, där $p > 0$. Visa genom att tillämpa kursens kunskaper om funktionen $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ att ekvationen

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

har högst två reella rötter.