INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 46

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Vi undersöker den med ekvationen

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

definierade funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Visa att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

(b) Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett c sådant att $f(c) = 42^{-42}$.

O2 Vi undersöker föregående uppgifts funktion.

(a) Visa att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.

(b) Visa (utan att använda derivatan) att det existerar ett $c \in \mathbb{R}$ så att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(c)$.

K1 Visa att $x^2 + x^3 - 42 \to \infty$ då $x \to \infty$ och $x^2 + x^3 - 42 \to -\infty$ då $x \to -\infty$.

K2 Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett $c \in \mathbb{R}$ sådant att $c^2 + c^3 - 42 = 2014$.

K3 Visa med hjälp av Bolzanos sats att talet $\sqrt[17]{13}$ finns i de reella talens mängd, eller med andra ord, visa att det existerar ett reellt tal c sådant att $c^{17} = 13$.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Visa att den med ekvationen $f(x) = x^{13} + x^{17}$ definierade funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har en kontinuerlig och strängt växande inversfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O4 Visa att den med ekvationen $f(x) = \sqrt[13]{x} + \sqrt[17]{x}$ deinierade funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har en kontinuerlig och strängt växande inversfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to$

$\mathbb{R}$.

K4 Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett reellt tal c sådant att $c^3 + \sqrt[3]{c} = 42$.

K5 Anta att för den kontinuerliga funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gäller för alla x att $0 < g(x) < 3$. Vi definierar funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^4 + 1}.$$

Visa att det finns ett största värde i mängden värden som f kan anta.

K6 Anta att funktionen $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ uppfyller följande villkor. För alla $\varepsilon > 0$ existerar ett sådant $\delta > 0$ att för $x, y \in (0,1)$ gäller: Om $0 < x < \delta$ och $0 < y < \delta$ så $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Visa att gränsvärdet $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existerar. I uppgiften lönar det sig att använda sig av det faktum att alla Cauchy-följder konvergerar. Börja så här. Visa först att x_n är en Cauchy-följd då vi för alla $n \in \mathbb{N}_1$ definierar

$$x_n = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Gränsvärdet

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

existerar alltså. Visa sedan att

$$a = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$